УДК 004.67+519.725

Т. Б. Мартинюк О. В., Войцеховська, О. С. Городецька

ЕКВІДИСТАНТНІСТЬ ТА ОДИНИЧНІ КОДИ

Вінницький національний технічний університет

В теорії кодування одиничні коди, як реалізація нетрадиційних методів кодування, зорієнтовані зокрема на таке практичне застосування, як передача символів (бітів) у каналах зв'язку. На сьогодні аналіз та дослідження одиничних кодів є пріоритетною та актуальною задачею з точки зору оцінювання їх коригуючих та завадостійких властивостей. В представленій роботі проаналізовано властивості трьох одиничних кодів, таких як одиничний позиційний (маркувальний), одиничний парний та одиничний нормальний коди. Наведено порівняльну характеристику цих кодів з урахуванням їх завадостійких властивостей. Враховано, що такі властивості коду визначаються кодовою відстанню, яка являє собою мінімальну відстань між його кодовими точками. Наведено формули визначення середньої ймовірності невиявлення помилок для отриманих кодів. Аналіз завадостійких властивостей одиничних кодів проводився з точки зору їх еквідистантності. Для таких кодів характерним є те, що кодова відстань в еквідистантному коді обов'язково повинна бути парним числом. Наведений в даній роботі аналіз характеристик одиничних кодів показав, що одним з оптимальних серед еквідистантних одиничних кодів можна вважати одиничний позиційний (маркувальний) код. Також наведено формулу для розрахунку нижньої оцінки середньої ймовірності невиявлення помилок для будь-якої ймовірності безпомилкової передачі символу, яка співпадає з величиною середньої ймовірності невиявлення помилок для еквідистантного коду Макдональда. Це також підтвердило оптимальність розглянутого одиничного позиційного (маркувального) коду. З урахуванням цього область застосування одиничного позиційного коду, як завадостійкого, поширюється за рахунок можливості кодування станів коригуючих автоматів та адресації даних у запам'ятовувальних пристроях обчислювальної техніки.

Ключові слова: одиничний код, завадостійка властивість, еквідистантність, ймовірність невиявлення помилок.

In coding theory, single codes, as the implementation of non-traditional coding methods, are focused in particular on such a practical application as the transmission of symbols (bits) in communication channels. Today, the analysis and study of unit codes is a priority and actuality in terms of evaluating their corrective properties.

This paper analyzes the properties of three unit codes, such as unit position (marking), unit pair and unit normal codes. The comparative characteristic of these codes taking into account their correcting properties is given. It is taken into account that the corrective properties of the code are determined by the code distance, which is the minimum distance between its code points. The formulas for determining the average probability of error non-detection for the received correction codes are given. Research and proof of corrective properties of unit codes were carried out from the point of view of their equidistance. Such codes are characterized by the fact that the code distance in the equidistant code must be an even number. The analysis of the characteristics of unit codes presented in this work showed that one of the optimal among equidistant unit codes can be considered a unit position (marking) code. The formula for calculating the lower estimate of the average probability of error non-detection for any probability of error-free transmission of the symbol, which coincides with the value of the average probability of error non-detection for the McDonald's equidistant code. This also confirmed the optimality of a considered unit position (marking) code.

With this in mind, the application area of the unit position code, as noise immunity, extends due to the possibility of encoding the states of correcting machines and addressing data in computer storage devices.

Keywords: single code, correction property, equidistance, probability of error non-detection .

DOI: 10.31649/1681-7893-2021-41-1-20-24

Вступ

Дослідження властивостей та можливостей широко відомих способів кодування інформації, а також специфічних кодів обумовлено їх практичним використанням в різних областях перспективних застосувань [1, 2]. Це стосується, наприклад, подання і передачі значних об'ємів даних в космічних дослідженнях, наземного фотографування за допомогою дронів, стиснення, шифрування та декодування інформації тощо [3-5].

Актуальність

Серед властивостей кодів основна увага розробників приділяється їх коригуючим та завадостійким можливостям [6-8]. Це дозволяє виділити специфічні коди, альтернативні до класичних двійкових і двійково-десяткових кодів [9-11]. Серед таких кодів займають своє місце одиничні коди [12-14].

В роботах [15-16] детально досліджено два відомих варіанта одиничних кодів, нормального та позиційного, за критеріями алгебраїчного кодування [9-11, 17, 18], що дозволило не тільки їх класифікувати, але й визначити їх завадостійкість. В роботах [15, 16, 19] також наведено порівняльний аналіз цих двох варіантів одиничних кодів. Разом з тим, відсутнє теоретичне доведення такої властивості, як контролездатність одиничних кодів, що потребує визначення такої їх характеристики, як еквідистантність.

Мета роботи

Метою роботи є аналіз властивостей варіантів одиничного кодування інформації з точки зору їх еквідистантності.

Постановка задачі

Теорія коригуючих кодів, що розроблена для двійкового симетричного каналу, базується на таких основних положеннях [6-8, 12]:

– при передачі елементарних сигналів можливі два види помилок: $0 \to 1$ і $1 \to 0$, ймовірність появи яких однакова;

– для передачі використовуються послідовності нулів та одиниць.

Якщо використовувати геометричну модель, то будь-який конкретний код V можна розглядати як деяку підмножину множини вершин одиничного n-вимірного куба E^n [6-8]. Вершини (вектори) куба E^n позначаються як $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, де α_i – i-та кодова точка, причому $\alpha_1 \in \{0,1\}$.

Відомо, що код $V = \{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots \bar{\alpha}_s\}$ виявляє t помилок, якщо зміна в будь-якому кодовому слові $\bar{\alpha}_i$ будь-якого числа $j \le t$ символів (розрядів) призводить до слова $\bar{\beta}_i$, яке не входить до множини V. Отже, здатність коду V виявляти будь-яку комбінацію з t або менше t кількістю помилок визначається такою умовою: код V виявляє t помилок тоді і тільки тоді, якщо відстань Хеммінга між двома точками з множини V не менше, ніж $(t+1)$ [6-8].

Відстань Хеммінга між двома вершинами $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ і $\bar{\beta} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$, яка відповідає кількості розрядів, в яких значення бітів різняться, можна обрахувати таким чином:

$$\rho(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|. \tag{1}$$

Отже, контролездатність коду V визначаються кодовою відстанню, яка являє собою мінімальну відстань $d(V)$ між його кодовими точками [17, 18]. До класу кодів, що мають високу контролездатність, відносять групові, досконалі, циклічні коди, коди Хеммінга та еквідистантні коди [6-8, 17, 18]. Особливістю еквідистантних кодів є рівність всіх попарних відстаней $d(V)$ [12]. Крім того, для еквідистантних кодів характерним є таке зауваження: кодова відстань в еквідистантному коді обов'язково повинна бути парним числом [12].

Ще однією з важливих характеристик коригуючих кодів при аналізі ймовірнісних критеріїв їх якості є середня ймовірність невиявлення помилок $P_n(V,q)$ [12]. Основним завданням при цьому є знаходження такого коду V, щоб величина $P_n(V,q)$ приймала найменше значення у класі всіх кодів із заданою кількістю точок S. Для величини $P_n(V,q)$ характерною є така залежність [12]:

$$P_n(V,q) = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{S} p(\bar{\alpha}_i), \tag{2}$$

де $p(\bar{\alpha}_i)$ – ймовірність того, що при передачі кодового слова $\bar{\alpha}_i$ помилки не виявляються.

Формули визначення $P_n(V,q)$ для оптимальних коригуючих кодів подано у табл. 1, де прийнято такі позначення: p – ймовірність спотворення двійкового символу; q – ймовірність безпомилкової передачі символу [12].

Таблиця 1 – Характеристика коригуючих кодів

Коригуючий код	Середня ймовірність невиявлення помилки
«Лічильник парності»	$P_n(V,q)=\frac{1}{2}+\frac{(q-p)^n-2q^n}{2}$
Код Хеммінга	$P_n(V,q)=\frac{1}{n+1}-\frac{n(q-p)^{\frac{n+1}{2}}-q^n}{n}$
Код Макдональда (еквідистантний код)	$P_n(V,q)=n\cdot p^{\frac{n+1}{2}}\cdot q^{\frac{n-1}{2}}$

Нижню оцінку для середньої ймовірності невиявлення помилок $P_n(V,q)$ для будь-якого коду $V\in E^n$, що містить S точок, можна визначити за формулою

$$P_n(V,q)\geq(S-1)\cdot q^n\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{2}\cdot\frac{S}{S-1}}. \tag{3}$$

Аналіз еквідистантних кодів

Прикладом найпростішого еквідистантного коду в E^n є така множина точок [12]:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_1&=(100\ldots0),\\ \bar{\alpha}_2&=(010\ldots0),\\ &\ldots\\ \bar{\alpha}_m&=(000\ldots1),\end{aligned} \tag{4}$$

яка являє собою різновид одиничного коду, а саме одиничний позиційний або маркувальний код [13, 14]. Відстань d між будь-якими двома точками з цієї множини дорівнює 2.

Геометрична модель коду вигляду (4) представляє собою сферу одиничного радіусу з центром у нульовій точці [12]. Сам код вигляду (4) формується шляхом послідовного зсуву одиниці в усіх векторах коду із розряду у розряд праворуч, починаючи з першого розряду першого вектору.

Використовуючи аналогічний прийом, можна отримати другий еквідистантний код, якщо взяти за початкову послідовність з двома парними одиницями [12]:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_1&=(1100\ldots00),\\ \bar{\alpha}_2&=(0110\ldots00),\\ &\ldots\\ \bar{\alpha}_m&=(0000\ldots11).\end{aligned} \tag{5}$$

Кодова відстань у коду вигляду (5) дорівнює двом, тобто d = 2. Але кількість точок коду дорівнює $m = n - 1$ на відміну від коду вигляду (4), в якого $m = n + 1$ з урахуванням точки $\bar{\alpha}_0=(000\ldots0)$ [12].

В роботі [12] доведено, що якщо в n -вимірному просторі існує деяка кількість точок, попарна відстань між якими однакова, то кількість цих точок не перевищує величину *(n* + 1*)*. Цей результат не пов’язаний з кодовою відстанню, а є наслідком геометричної природи цього коду – його еквідистантністю. Отже, код вигляду (4) має максимальну кількість точок серед двох наведених кодів з кодовою відстанню d = 2.

Ще один різновид одиничних кодів, а саме одиничний нормальний код [13, 14], має вигляд:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_1&=(100\ldots0),\\ \bar{\alpha}_2&=(110\ldots0),\\ &\ldots\\ \bar{\alpha}_m&=(111\ldots1).\end{aligned} \tag{6}$$

Цей код не відноситься до еквідистантних кодів, оскільки має кодову відстань d = 1 між сусідніми кодовими словами, а отже, не має здатності виявляти навіть одну помилку [15, 16].

У табл. 2 наведено основні характеристики одиничних кодів з урахуванням їх коригуючих властивостей.

Таблиця 2 –Характеристики одиничних кодів

Назва	Кодова відстань	Кількість точок коду	Еквідистант-ність	Виявлення помилок
Одиничний позиційний (маркувальний) код	$d = 2$	$m = n + 1$	+	+
Одиничний парний код	$d = 2$	$m = n - 1$	+	+
Одиничний нормальний код	$d = 1$	$m = n + 1$	-	-

Аналіз даних табл. 2 свідчить про те, що одиничний позиційний (маркувальний) код вигляду (4) можна вважати одним з оптимальних кодів при d = 2, тобто серед еквідистантних одиничних кодів. Разом з тим, для цього коду можна розрахувати нижню оцінку середньої ймовірності невиявлення помилок $P_n\left(V,q\right)$ за формулою (3) при $S = n + 1$ таким чином:

$$P_n\left(V,q\right) \geq n \cdot p^{\frac{n+1}{2}} \cdot q^{\frac{n-1}{2}}. \tag{7}$$

Отриманий результат співпадає з величиною $P_n\left(V,q\right)$ для коду Макдональда (табл. 1), який теж є еквідистантним кодом [12].

Висновки

Результати аналізу властивості контролездатності трьох одиничних кодів показали, що тільки одиничний позиційний (маркувальний) код на відміну від одиничного нормального коду відноситься до еквідистантних кодів, а також є оптимальним кодом на відміну від одиничного парного коду, оскільки виявляє помилки і має максимально можливу кількість точок коду.

Крім того, одиничний позиційний (маркувальний) код є оптимальним разом з кодом Макдональда через нижню оцінку середньої ймовірності невиявлення помилок для будь-якої ймовірності безпомилкової передачі символу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

[1] О. В. Бережная, В. В. Арбузов, и М. В. Арбузов, «О возможности применения равновесных кодов в асимметричных каналах связи,» *Современные методы кодирования в электронных системах,* с. 65 – 66. 2004.

[2] А. А. Борисенко, *Биномиальный счет и счетчики*. Суми, Україна: СумДУ, 2008.

[3] Я. М. Николайчук*, Теорія джерел інформації*. Тернопіль, Україна: ТзОВ “Терно–граф”, 2010.

[4] Г. Джонсон, и М. Грэхем, *Высокоскоростная передача цифровых данных*, пер. с анг. М., Россия: Издательский дом “Вильямс”, 2005.

[5] В. М. Муттер, *Основы помехоустойчивой телепередачи информации*. Л., Россия: Энергоатомиздат, 1990.

[6] У. Питерсон, и Э. Уэлдон, *Коды, исправляющие ошибки*, пер. с англ. М., Россия: Мир, 1976.

[7] Р. Блейхут, *Теория и практика кодов, контролирующих ошибки*, пер. с англ. М., Россия: Мир, 1986.

[8] Дж. Кларк, и Дж. Кейн, *Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи*, пер. с анг. М., Россия: Радио и связь, 1987.

[9] Ю. П. Жураковський, і В. П Полторак, *Теорія інформації і кодування*. К., Україна: Вища школа, 2001.

[10] Н. Г Березюк, А. Г. Андрущенко, С. С. Мощицкий и др. *Кодирование информации (двоичные коды)*. Харьков, Украина: Вища школа, 1978.

[11] Т. Касами, Н. Токура, Е. Ивадари, и Я. Инагаки, *Теория кодирования*, пер. с анг. М., Россия: Мир, 1978.

[12] В. К. Леонтьев, *Теория кодирования*, М., Россия: Знание, 1977.

[13] С. В. Свечников, В. П. Кожемяко, и Л. И. Тимченко, *Квазиимпульсно-потенциальные оптоэлектронные элементы и устройства логико-временного типа*. К., Украина: Наукова думка, 1987.

[14] Т. Б. Мартинюк, О. М. Тарасова, і М. М. Аль-Хіярі, «Особливості логіко-часового зображення числової інформаці,» *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №1, с.72 – 76. 2000.

[15] Т. Б. Мартинюк, Мохамед Салем Нассер, В. В. Власійчук, і О. М. Наконечний, «Аналіз можливостей одиничного кодування числової інформації,» *Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології*, № 2(10), с. 39 – 44. 2005.

[16] В. П. Кожем'яко, Т. Б. Мартинюк, В. В. Дмитрук, і В. В. Власійчук, «Класифікація одиничних кодів,» *Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології*, № 1(11), 2006, с. 36 – 42.

[17] Ю. Г. Дадаев, *Теория арифметических кодов*. М., Россия: Радио и связь, 1981.

[18] Э. Берлекэмп, *Алгебраическая теория кодирования*, пер. с англ. М., Россия: Мир, 1971.

[19] Т. Мартинюк, О. Тарасова, М. Очкуров, і П. Павлов, «Особливості одиничного кодування інформації» *Методи та засоби кодування, захисту й ущільнення інформації*, 6-а міжнар. наук.-практ. конф., 24-25 жовтня 2017 р., Вінниця, Україна: ВНТУ, 2017, с. 10 – 12.

REFERENCES

[1] O. V. Berezhnaia, V. V. Arbuzov, y M. V. Arbuzov, «O vozmozhnosty prymenenyia ravnovesnыkh kodov v asymmetrychnыkh kanalakh sviazy,» Sovremennыe metodы kodyrovanyia v эlektronnыkh systemakh, s. 65 – 66. 2004.

[2] A. A. Borysenko, Bynomyalnyi schet y schetchyky. Sumy, Ukraina: SumDU, 2008.

[3] Ya. M. Nykolaichuk, Teoriia dzherel informatsii. Ternopil, Ukraina: TzOV “Terno–hraf”, 2010.

[4] H. Dzhonson, y M. Hrэkhem, Vыsokoskorostnaia peredacha tsyfrovыkh dannыkh, per. s anh. M., Rossyia: Yzdatelskyi dom “Vyliams”, 2005.

[5] V. M. Mutter, Osnovы pomekhoustoichyvoi teleperedachy ynformatsyy. L., Rossyia: Enerhoatomyzdat, 1990.

[6] U. Pyterson, i E. Ueldon, Kody, iyspravliaiushchye oshybki, per. s anhl. M., Rossyia: Myr, 1976.

[7] R. Bleikhut, Teoryia y praktyka kodov, kontrolyruiushchykh oshybki, per. s anhl. M., Rossyia: Myr, 1986.

[8] Dzh. Klark, y Dzh. Kein, Kodyrovanye s ispravlenyem oshybok v systemakh tsyfrovoi sviazy, per. s anh. M., Rossyia: Radyo y sviaz, 1987.

[9] Yu. P. Zhurakovskyi, i V. P Poltorak, Teoriia informatsii i koduvannia. K., Ukraina: Vyshcha shkola, 2001.

[10] N. H Bereziuk, A. H. Andrushchenko, S. S. Moshchytskyi y dr. Kodyrovanie informatsii (dvoychnye kody). Kharkov, Ukrayna: Vyshcha shkola, 1978.

[11] T. Kasamy, N. Tokura, E. Yvadary, y Ya. Ynahaky, Teoryia kodyrovanyia, per. s anh. M., Rossyia: Myr, 1978.

[12] V. K. Leontev, Teoryia kodyrovanyia, M., Rossyia: Znanye, 1977.

[13] S. V. Svechnykov, V. P. Kozhemiako, y L. Y. Tymchenko, Kvazyympulsno-potentsyalnye optoelektronnye elementy y ustroistva lohyko-vremennoho typa. K., Ukrayna: Naukova dumka, 1987.

[14] T. B. Martyniuk, O. M. Tarasova, i M. M. Al-Khiiari, «Osoblyvosti lohiko-chasovoho zobrazhennia chyslovoi informatsii,» Visnyk Vinnytskoho politekhnichnoho instytutu, №1, c.72 – 76. 2000.

[15] T. B. Martyniuk, Mokhamed Salem Nasser, V. V. Vlasiichuk, i O. M. Nakonechnyi, «Analiz mozhlyvostei odynychnoho koduvannia chyslovoi informatsii,» Optyko-elektronni informatsiino-enerhetychni tekhnolohii, № 2(10), s. 39 – 44. 2005.

[16] V. P. Kozhemiako, T. B. Martyniuk, V. V. Dmytruk, i V. V. Vlasiichuk, «Klasyfikatsiia odynychnykh kodiv,» Optyko-elektronni informatsiino-enerhetychni tekhnolohii, № 1(11), 2006, s. 36 – 42.

[17] Yu. H. Dadaev, Teoryia aryfmetycheskykh kodov. M., Rossyia: Radyo y sviaz, 1981.

[18] E. Berlekemp, Alhebraycheskaia teoryia kodyrovanyia, per. s anhl. M., Rossyia: Myr, 1971.

[19] T. Martyniuk, O. Tarasova, M. Ochkurov, i P. Pavlov, «Osoblyvosti odynychnoho koduvannia informatsii» Metody ta zasoby koduvannia, zakhystu y ushchilnennia informatsii, 6-a mizhnar. nauk.-prakt. konf., 24-25 zhovtnia 2017 r., Vinnytsia, Ukraina: VNTU, 2017, s. 10 – 12.

Мартинюк Тетяна Борисівна – д.т.н, професор, професор кафедри обчислювальної техніки, email: martyniuk.t.b@gmail.com;

Войцеховська Олена Валеріївна – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри обчислювальної техніки, email: vojcexovska.o.v@vntu.edu.ua;

Городецька Оксана Степанівна – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри обчислювальної техніки, email: horodecka.os@gmail.com.