

УДК 535.135

¹В.М. БОРОВИЦЬКИЙ, ¹О.Є. ГУДЗЬ, ²С.Є. ТУЖАНСЬКИЙ

МЕТОД РОЗРАХУНКУ ФУНКЦІЇ РОЗСІЮВАННЯ ТОЧКИ ОПТИЧНОЇ СИСТЕМИ

¹Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» 03056, пр-т. Перемоги 37, м. Київ, Україна, E-mail: vboryvsky@gmail.com

²Вінницький національний технічний університет, 21021, вул. Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, Україна

Анотація. У статті представлено математичний апарат для розрахунку тривимірної функції розсіяння точки (ФРТ) високоапертурної оптичної системи. Запропонований на принципі Гюйгенса-Френеля метод базується на тому, що сферична хвиля на трьохвимірній поверхні вихідної зіниці розглядається як результат суперпозиції елементарних вторинних точкових джерел, які випромінюють когерентні електромагнітні хвилі з сферичним хвильовим фронтом. Формується розподіл узагальнених комплексних амплітуд поля у тривимірному просторі поблизу точки фокусу. Такий розподіл використовується для розрахунку розподілу інтенсивності у зоні фокусу оптичної системи, яка і є ФРТ. У статті наведені результати розрахунків ФРТ та їх порівняльний аналіз.

Ключові слова: функція розсіяння точки, оптична система, перетворення Фур'є, принцип Гюйгенса-Френеля, просторова роздільна здатність.

Аннотация. В статье представлен математический аппарат для точного расчета трехмерной функции рассеяния точки (ФРТ) высокоапертурной оптической системы. Предложенный на принципе Гюйгенса-Френеля метод основан на том, что сферическая волна на трехмерных поверхностях выходного зрачка рассматривается как результат суперпозиции элементарных вторичных точечных источников излучения, которые излучают когерентные электромагнитные волны со сферическим волновым фронтом. Формируется распределение обобщенных комплексных амплитуд в трехмерном пространстве вблизи точки фокусировки. Это распределение используется для расчета распределения интенсивности в зоне фокуса оптической системы, которая и является ФРТ. В статье приводятся результаты расчетов ФРТ и их сравнительный анализ.

Ключевые слова: функция рассеяния точки, оптическая система, функция зрачка, преобразование Фурье, принцип Гюйгенса-Френеля, пространственное разрешение.

Abstract. The article presents a mathematical apparatus for precise calculation of the three-dimensional point spread function (PSF) of a high-aperture optical system. The proposed method is based on the Huygens-Fresnel principle: a spherical wave on the three-dimensional surface of the exit pupil is considered as result of the superposition of elementary secondary point radiation sources. These point sources emit coherent electromagnetic waves with a spherical wave front. They form a certain distribution of generalized complex amplitudes in three-dimensional space near the focus point. This distribution is used to calculate the intensity distribution in the focus area of the optical system, which is the PSF. The article presents the results of PSF calculations and their comparative.

Keywords: point spread function, optical system, Fourier transform, Huygens-Fresnel principle, intensity distribution, optical microscopy, spatial resolution.

DOI: 10.31649/1681-7893-2021-41-1-69-77

ВСТУП

Функція розсіювання точки (ФРТ) є важливою характеристикою оптичної системи (ОС). Вона характеризує просторову роздільну здатність, тобто здатність формувати такі зображення, у яких візуально чи за допомогою методів цифрової обробки зображень можна розрізнити об'єкти або фрагменти об'єктів малого розміру [1,2]. Якщо розглядати ОС як просторовий лінійний фільтр, то ФРТ – це імпульсний відгук ОС, а результатом прямого перетворення Фур'є є оптична

передавальна функція ОС [1,2]. У інженерній практиці доводиться розраховувати ФРТ у площині зображення та у трьохвимірному просторі зображення. Якщо для розрахунків ФРТ у площині зображень є досконало розроблений математичний апарат, то розрахунок трьохвимірної ФРТ пов'язаний з значними математичними складнощами [3-6]. Основна складність при розрахунку 3D ФРТ полягає у відсутності точного аналітичного рішення (вимагається інтегрування багатовимірних функцій) [3-6]. Раніше, коли потужні комп'ютери були недоступними, такі розрахунки ґрунтувалися на аналітичних спрощеннях або наближеннях складних інтегралів. Як правило, припущення щодо оптики далекого поля (довжина хвилі $\lambda \ll f$, f - фокусна відстань ОС) та невеликої апертури (діаметр апертури $d_A \ll f$) були прийняті для отримання параксіальних наближень, таких як наближення Френеля чи Фраунгофера. Наприклад, М. Борн та Е. Вольф представили математичний апарат для розрахунку розподілу інтенсивності поблизу фокусу, використовуючи параксіальне наближення Дебая, яке вважається класичним [2].

Наступним кроком було вивчення розподілу інтенсивності для когерентних та некогерентних оптичних систем на основі двовимірного перетворення Фур'є плоских знічних функцій або їх перетинів [3-6]. Цей підхід можна розширити до випадку частково когерентної та частково поляризованої ОС [4, 6]. С. Шеппард, Т. Вілсон, С. Хелл та інші досліджували тривимірну скалярну та векторну оптичні передавальні функції високо-апертурної ОС [3-5]. Ці математичні методи базуються на перетворенні Фур'є тривимірних знічних функцій та їх перетинах [1,3].

Зараз потужні комп'ютери стали доступними, і тому можна виконувати швидкі обчислення багатовимірних інтегралів. Тому багато дослідників та інженерів цікавляться наступними питаннями: чи можна отримати математичний апарат для розрахунку трьохвимірної ФРТ без використання наближень Френеля чи Фраунгофера? Чи можна знайти апроксимації виразів для розрахунку такої ФРТ, які забезпечують прийнятну для інженерної практики точність? Метою статті є спроба знайти відповіді на ці запитання.

1. МЕТОД РОЗРАХУНКУ ТРИВИМІРНОЇ ФУНКЦІЇ РОЗСПОВАННЯ ТОЧКИ

Для розрахунку ФРТ приймаємо такі припущення:

1. ОС є дифракційно-обмеженою системою з осьюовою симетрією [1]. Припущення про дифракційно-обмежену систему потрібно для дослідження 3D ФРТ без впливу хвильових аберацій, більшість оптичних систем мають осьову симетрію [1,2,7]. Очевидно, що відповідна тривимірна ФРТ буде також мати осьову симетрію, а її перетин у площині (x, z) повністю описує відповідну структуру (рис. 1).

2. Розрахунки базуються на теорії скалярної дифракції. Вплив поляризації оптичного випромінювання не враховується.

3. Оптичне випромінювання є когерентним та монохроматичним [2]. ФРТ обчислюється як зображення точкового джерела, випромінювання якого також вважається когерентним [1].

4. Розглядаємо ОС для випадку далекого поля: робочі довжини хвиль значно менші фокусної відстані ОС [7,8]. Наприклад, типові лінзи мікроскопа з максимальною числовою діафрагмою мають фокусну відстань у діапазоні 1,6-10,0 мм, коли діапазон довжин хвиль для зору спостереження 0,47 - 0,67 мкм [8].

5. Формально трьохвимірну ФРТ слід розраховувати в просторі зображень ОС. Але для оптичної мікроскопії важлива просторова роздільна здатність в просторі об'єкта. ОС мікрооб'єктів аналізується шляхом зворотного трасування променів, тому трьохвимірна ФРТ буде розраховуватися в просторі об'єкта в зворотному ході променів.

6. ОС може мати транспарант у фокальній площині, який здійснює амплітудну та фазову модуляцію оптичного випромінювання залежно від координат на поверхні зніци. Це допомагає ввести за потреби будь-яку аберацію хвилі [3].

7. Інтенсивність випромінювання розраховується на елементарній ділянці, нормальній до оптичної осі ОС. Інтенсивність пропорційна квадрату абсолютного значення комплексної амплітуди електромагнітних хвиль [2,3]. Також інтенсивність пропорційна вихідному сигналу фотоприймача, чутлива зона якого розташована перпендикулярно до оптичної осі (рис. 1).

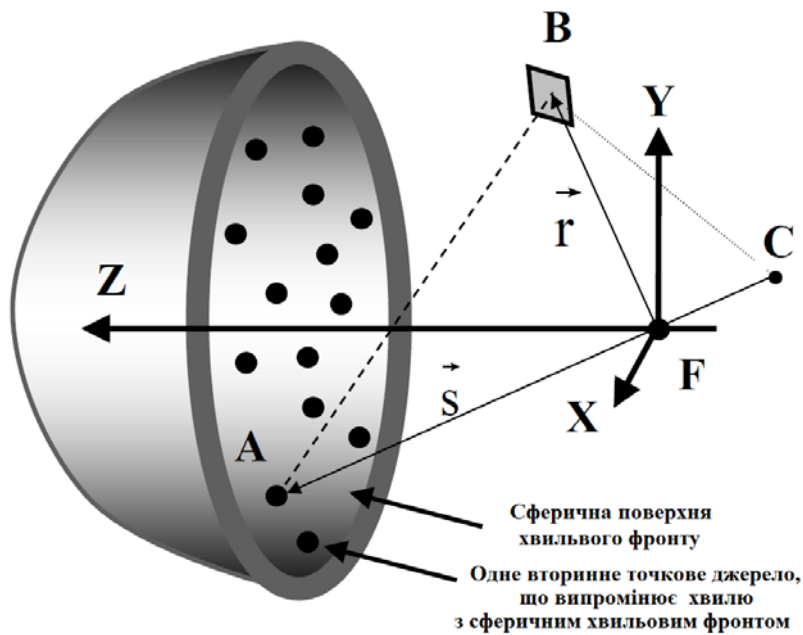


Рис. 1 – Розрахунок трьохвимірної ФРТ

Розглянемо сферичний фронт хвилі, що виходить із вхідної зіниці ОС [2] (рис. 1). Відповідно до принципу Гюйгенса-Френеля, кожна точка на цьому фронті сферичної хвилі відіграє роль вторинного точкового джерела. Отримана комплексна амплітуда пропорційна суперпозиції з інтерференцією всіх хвиль, що надходять від цих вторинних точкових джерел. Тому можемо представити сферичний фронт хвилі як численний набір вторинних точкових джерел світла, які випромінюють когерентні хвилі з сферичними хвильовими фронтами [6] (рис. 1).

$$E(\vec{s}, \vec{r}) = \frac{E_0 \cdot \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda} \cdot j \cdot n \cdot |AB|\right)}{n \cdot |AB|} = \frac{E_0 \cdot \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda} \cdot j \cdot n \cdot |\vec{s} - \vec{r}|\right)}{n \cdot |\vec{s} - \vec{r}|}, \quad (1)$$

де \vec{s} – вектор, що визначає розташування вторинного точкового джерела A відносно точки фокусу F ; \vec{r} – вектор, який визначає розташування елементарної області B відносно точки фокусу F ; $|AB|$ – відстань від точки A до точки B ; E_0 – початкова амплітуда сферичної електромагнітної хвилі; $E(\vec{s}, \vec{r})$ – комплексна амплітуда однієї вторинної сферичної електромагнітної хвилі, що йде з точки A з координатами s на поверхні зіниці до точки B з координатами r ; j – константа: $j^2 = -1$; λ , n – довжина хвилі оптичного випромінювання та показник заломлення, відповідно.

Ми маємо підсумувати усі хвилі, що надходять до даної елементарної області B , розташованої у тривимірному просторі, враховуючи фази та нахили оптичних пучків (1). При підсумовуванні комплексних амплітуд ми повинні брати до уваги можливі зміни амплітуди та фази, внесені ОС та зменшення інтенсивності за рахунок нахилу пучків. Сума нескінченної кількості елементарних точкових джерел світла означає розрахунок двовимірного інтегралу на поверхні сферичної зіниці, розташованої у тривимірному просторі. Щоб отримати повний вираз, ми застосуємо декартові кутові координати (α_X, α_Y) , щоб вказати точку на поверхні зіниці:

$$h_0(\vec{r}) = \left| \iint_{\Omega} p[\vec{s}(\alpha_X, \alpha_Y)] \cdot w[\vec{s}(\alpha_X, \alpha_Y), \vec{r}] \cdot E[\vec{s}(\alpha_X, \alpha_Y), \vec{r}] \cdot d\alpha_X \cdot d\alpha_Y \right|^2 = \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \iint_{\Omega} \frac{E_0 \cdot p[\vec{s}(\alpha_x, \alpha_y)] \cdot w[\vec{s}(\alpha_x, \alpha_y), \vec{r}] \cdot \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda} \cdot j \cdot n \cdot |\vec{s}(\alpha_x, \alpha_y) - \vec{r}|\right)}{n \cdot |\vec{s}(\alpha_x, \alpha_y) - \vec{r}|} \cdot d\alpha_x \cdot d\alpha_y \right|^2 = \\
 &= h(x, y, z) = E_0^2 \cdot \left| \iint_{\Omega} p(\alpha_x, \alpha_y) \cdot w(\alpha_x, \alpha_y, x, y, z) \cdot \right. \\
 &\left. \frac{\exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda} \cdot j \cdot n \cdot \sqrt{[s_x(\alpha_x, \alpha_y) - x]^2 + [s_y(\alpha_x, \alpha_y) - y]^2 + [s_z(\alpha_x, \alpha_y) - z]^2}\right)}{n \cdot \sqrt{[s_x(\alpha_x, \alpha_y) - x]^2 + [s_y(\alpha_x, \alpha_y) - y]^2 + [s_z(\alpha_x, \alpha_y) - z]^2}} \cdot d\alpha_x d\alpha_y \right|^2 \approx \\
 &\approx E_0^2 \cdot \left| \iint_{\Omega} p(\alpha_x, \alpha_y) \cdot \sqrt{\cos[\alpha(\alpha_x, \alpha_y)]} \cdot \right. \\
 &\left. \frac{\exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda} \cdot j \cdot n \cdot \sqrt{[s_x(\alpha_x, \alpha_y) - x]^2 + [s_y(\alpha_x, \alpha_y) - y]^2 + [s_z(\alpha_x, \alpha_y) - z]^2}\right)}{n \cdot \sqrt{[s_x(\alpha_x, \alpha_y) - x]^2 + [s_y(\alpha_x, \alpha_y) - y]^2 + [s_z(\alpha_x, \alpha_y) - z]^2}} \cdot d\alpha_x d\alpha_y \right|^2 = \\
 &= E_0^2 \cdot \left| \iint_{\Omega} \frac{p(\alpha_x, \alpha_y)}{\sqrt{tg^2(\alpha_x) + tg^2(\alpha_y) + 1}} \cdot \right. \\
 &\left. \frac{\exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda} \cdot j \cdot n \cdot \sqrt{\left[\frac{R \cdot tg(\alpha_x)}{\sqrt{tg^2(\alpha_x) + tg^2(\alpha_y) + 1}} - x\right]^2 + \left[\frac{R \cdot tg(\alpha_y)}{\sqrt{tg^2(\alpha_x) + tg^2(\alpha_y) + 1}} - y\right]^2 + \left[\frac{R}{\sqrt{tg^2(\alpha_x) + tg^2(\alpha_y) + 1}} - z\right]^2}\right)}{n \cdot \sqrt{\left[\frac{R \cdot tg(\alpha_x)}{\sqrt{tg^2(\alpha_x) + tg^2(\alpha_y) + 1}} - x\right]^2 + \left[\frac{R \cdot tg(\alpha_y)}{\sqrt{tg^2(\alpha_x) + tg^2(\alpha_y) + 1}} - y\right]^2 + \left[\frac{R}{\sqrt{tg^2(\alpha_x) + tg^2(\alpha_y) + 1}} - z\right]^2}} \right|^2 = \\
 &= E_0^2 \cdot \left| \iint_{\Omega} \frac{p(\alpha_x, \alpha_y)}{\sqrt{tg^2(\alpha_x) + tg^2(\alpha_y) + 1}} \cdot \right. \\
 &\left. \frac{\exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda} \cdot n \cdot R \cdot j \cdot \sqrt{\left[\frac{tg(\alpha_x)}{\sqrt{tg^2(\alpha_x) + tg^2(\alpha_y) + 1}} - \frac{x}{R}\right]^2 + \left[\frac{tg(\alpha_y)}{\sqrt{tg^2(\alpha_x) + tg^2(\alpha_y) + 1}} - \frac{y}{R}\right]^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{tg^2(\alpha_x) + tg^2(\alpha_y) + 1}} - \frac{z}{R}\right]^2}\right)}{n \cdot R \cdot \sqrt{\left[\frac{tg(\alpha_x)}{\sqrt{tg^2(\alpha_x) + tg^2(\alpha_y) + 1}} - \frac{x}{R}\right]^2 + \left[\frac{tg(\alpha_y)}{\sqrt{tg^2(\alpha_x) + tg^2(\alpha_y) + 1}} - \frac{y}{R}\right]^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{tg^2(\alpha_x) + tg^2(\alpha_y) + 1}} - \frac{z}{R}\right]^2}} \right|^2,
 \end{aligned}$$

де $h_0(r) = h_0(x, y, z)$ – ФРТ як тривимірний розподіл ефективної інтенсивності у залежності від лінійних координат елементарної області В у просторі об'єктів; Ω – двовимірний простір для інтеграції на сферичній поверхні зіниці $\Omega: \alpha_x^2 + \alpha_y^2 \leq \sigma_A^2$; $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z) = \{s_x(\alpha_x, \alpha_y), s_y(\alpha_x, \alpha_y), s_z(\alpha_x, \alpha_y)\}$ – вектор декартових лінійних координат елементарного джерела А (див. додаток А):

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x(\alpha_x, \alpha_y) \\ s_y(\alpha_x, \alpha_y) \\ s_z(\alpha_x, \alpha_y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R \cdot \operatorname{tg}(\alpha_x)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2(\alpha_x) + \operatorname{tg}^2(\alpha_y) + 1}} \\ \frac{R \cdot \operatorname{tg}(\alpha_y)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2(\alpha_x) + \operatorname{tg}^2(\alpha_y) + 1}} \\ R \\ \sqrt{\operatorname{tg}^2(\alpha_x) + \operatorname{tg}^2(\alpha_y) + 1} \end{pmatrix} = \frac{R}{\sqrt{\operatorname{tg}^2(\alpha_x) + \operatorname{tg}^2(\alpha_y) + 1}} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{tg}(\alpha_x) \\ \operatorname{tg}(\alpha_y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{r} = (x, y, z)$ - вектор розташування елементарної області B щодо точки фокусування F , вектор має Декартові лінійні координати (x, y, z) ; α_x, α_y - декартові кутові координати вектору \vec{s} ; $p(s)$ - комплексна зінична функція як функція кутових координат вектору \vec{s} на поверхні сферичної зіниці (функція може описувати за наявності амплітудну та фазову модуляцію); $w(s, r) = \sqrt{\cos(\alpha)}$ - нормований ваговий коефіцієнт, що враховує кути між нормаллю до елементарної області B та напрямками АВ (рис. 1) [4]:

$$w(\alpha_x, \alpha_y, x, y, z) \approx w(\alpha_x, \alpha_y) = \sqrt{\cos[\alpha(\alpha_x, \alpha_y)]} = 1 / \sqrt[4]{\operatorname{tg}^2(\alpha_x) + \operatorname{tg}^2(\alpha_y) + 1};$$

$\sigma_A = \arcsin\left(\frac{NA}{n}\right)$ - кутова апертура ОС (NA - числова апертура, n - показник заломлення в просторі об'єктів [3].

2. АППРОКСИМАЦІЯ ТРИВИМІРНОЇ ФУНКЦІЇ РОЗСІЯННЯ ТОЧКИ

Отриманий математичний апарат дозволяє записати вираз для обчислення ФРТ $h_F(x, y, z)$, як результат заміни відстані між двома точками скалярним добутком векторів при умові $w(s, r) = 1$ (Додаток А):

$$\begin{aligned} h_F(\vec{r}) &= \left| \iint_{\Omega} E_0 \cdot p[\vec{s}(\alpha_x, \alpha_y)] \cdot w(\alpha_x, \alpha_y, x, y, z) \cdot \frac{\exp\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot j \cdot n \cdot (\vec{s}(\alpha_x, \alpha_y) \cdot \vec{r})\right)}{n \cdot R} d\alpha_x d\alpha_y \right|^2 = h_F(x, y, z) = \quad (3) \\ &= \left(\frac{E_0}{n \cdot R}\right)^2 \cdot \left| \iint_{\Omega} p(\alpha_x, \alpha_y) \cdot \exp\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot j \cdot n \cdot [s_x(\alpha_x, \alpha_y) \cdot x + s_y(\alpha_x, \alpha_y) \cdot y + s_z(\alpha_x, \alpha_y) \cdot z]\right) d\alpha_x d\alpha_y \right|^2 = \\ &= h_0 \cdot \left| \iint_{\Omega} p(\alpha_x, \alpha_y) \cdot \exp\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot j \cdot n \cdot \left[\frac{\operatorname{tg}(\alpha_x) \cdot x + \operatorname{tg}(\alpha_y) \cdot y + z}{\sqrt{\operatorname{tg}^2(\alpha_x) + \operatorname{tg}^2(\alpha_y) + 1}}\right]\right) d\alpha_x d\alpha_y \right|^2, \end{aligned}$$

де $h_0 = \left(\frac{E_0}{n \cdot R}\right)^2$ - константа.

Вираз (3) можна переписати шляхом запису функції $w(s, r)$ у явному вигляді та отримати математичний вираз для розрахунку ФРТ високоапертурної ОС $h_{FA}(x, y, z)$:

$$h_{FA}(\vec{r}) = h_0 \cdot \left| \iint_{\Omega} w[\vec{s}(\alpha_x, \alpha_y), \vec{r}] \cdot p[\vec{s}(\alpha_x, \alpha_y)] \cdot \exp\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot j \cdot n \cdot \vec{s}(\alpha_x, \alpha_y) \cdot \vec{r}\right) \cdot d\alpha_x \cdot d\alpha_y \right|^2 = h_F(x, y, z) =$$

$$= h_0 \cdot \left| \iint_{\Omega} \sqrt{\cos[\alpha(\alpha_x, \alpha_y)]} \cdot p(\alpha_x, \alpha_y) \cdot \exp\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot j \cdot n \cdot [s_x(\alpha_x, \alpha_y) \cdot x + s_y(\alpha_x, \alpha_y) \cdot y + s_z(\alpha_x, \alpha_y) \cdot z]\right) d\alpha_x d\alpha_y \right|^2 =$$

$$= h_0 \cdot \left| \iint_{\Omega} \left[\frac{p(\alpha_x, \alpha_y)}{\sqrt{tg^2(\alpha_x) + tg^2(\alpha_y) + 1}} \right] \cdot \exp\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot j \cdot n \cdot \left[\frac{tg(\alpha_x) \cdot x + tg(\alpha_y) \cdot y + z}{\sqrt{tg^2(\alpha_x) + tg^2(\alpha_y) + 1}} \right]\right) d\alpha_x d\alpha_y \right|^2. \quad (4)$$

Отримані вирази (3)-(4) дозволяють розрахувати трьохвимірну ФРТ ОС без застосування наближень Френеля чи Фраунгофера. Тому математичний апарат (1)-(4) можна використовувати для обчислення ФРТ ОС з будь-якою апертурою, у тому числі для ОС з великою апертурою.

Розглянемо випадок ОС з малою апертурою, коли $\sigma_A \ll 1$. Тоді можна застосувати такі наближення: $tg(\alpha_x) \approx \alpha_x$, $tg(\alpha_y) \approx \alpha_y$, $tg^2(\alpha_x) \approx 0$, $tg^2(\alpha_y) \approx 0$, $w(\alpha_x, \alpha_y) = 1$, а формула (4) для фокальної площини $z=0$ прийме вигляд:

$$h_{FA}(x, y, 0) = h_0 \cdot \left| \iint_{\Omega} p(\alpha_x, \alpha_y) \cdot \exp\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot j \cdot n \cdot \left[\frac{tg(\alpha_x) \cdot x + tg(\alpha_y) \cdot y + 0}{\sqrt{tg^2(\alpha_x) + tg^2(\alpha_y) + 1}} \right]\right) d\alpha_x d\alpha_y \right|^2 =$$

$$= h_0 \cdot \left| \iint_{\Omega} p(\alpha_x, \alpha_y) \cdot \exp\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot j \cdot n \cdot [\alpha_x \cdot x + \alpha_y \cdot y]\right) d\alpha_x d\alpha_y \right|^2.$$

Вираз (5) містить формулу зворотного перетворення Фур'є функції знімки, а його математичний зміст – результат прямого перетворення Фур'є ФРТ ОС з малою апертурою (оптична передавальна функція) розраховується як автокореляція функцій знімки. Тобто теоретично підтверджено відомий вираз оптичної передавальної функції некогерентної ОС з малою апертурою без застосування наближень Френеля чи Фраунгофера.

3. ТОЧНІСТЬ РОЗРАХУНКІВ ТРИВИМІРНОЇ ФУНКЦІЇ РОЗСІЯННЯ ТОЧКИ

Виконаємо порівняльний аналіз математичних виразів (2), (3) та (4). Цей аналіз зробимо для набору широко поширених мікрооб'єктивів компанії Zeiss (таблиця 1) [8].

Таблиця 1 – Параметри мікрооб'єктивів компанії Zeiss

Об'єктив мікроскопа	Фокальна відстань f , мм	σ_A , кут. град.	x_{MIN} , мкм	z_{MIN} , мкм	z_{MIN}/x_{MIN}	f/x_{MIN}	f/z_{MIN}
<i>Zeiss EC Epiplan Apochromat 100x/0.95</i>	1.6	71.8	0.289	0.800	2.763	5682.727	89789.061
<i>Zeiss EC Epiplan Neofluar 20x/0.50</i>	8.2	30.0	0.550	4.105	7.464	14954.545	7307.705
<i>Zeiss EC Epiplan Neofluar 10x/0.25</i>	16.5	14.5	1.100	17.321	15.746	14954.545	835.857
<i>Zeiss EC Epiplan Neofluar 5x/0.13</i>	32.9	7.5	2.115	64.813	30.639	15552.727	115.249
<i>Zeiss EC Epiplan Neofluar 2.5x/0.06</i>	65.8	3.4	4.583	305.280	66.607	14356.364	11.268

Результати порівняльного аналізу наведено у таблиці 2. Значення ФРТ були розраховані в об'ємі, розміри якого пропорційні мінімальним роздільним просторовим періодам ОС та нормовані відносно значення ФРТ у точці (0,0), яке приймалося за 100%:

$$x_{MIN} = \frac{\lambda}{2 \cdot n \cdot \sin(\sigma_A)} = \frac{\lambda}{2 \cdot NA}, \quad z_{MIN} = \frac{\lambda}{n \cdot [1 - \cos(\sigma_A)]} = \frac{\lambda}{2 \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{NA}{n}\right)^2} \right]}, \quad (6)$$

**ОПТИКО-ЕЛЕКТРОННІ ПРИСТРОЇ ТА КОМПОНЕНТИ В ЛАЗЕРНИХ І ЕНЕРГЕТИЧНИХ
ТЕХНОЛОГІЯХ**

де x_{MIN} , z_{MIN} - мінімальні роздільні просторові періоди у площині об'єкта та уздовж оптичної осі ОС, відповідно [1,2].

Розрахунки проводились у два етапи. На першому етапі координати (s_x , s_y , s_z) та відповідні дискретні значення $p(s)$ та $w(s)$ отримуються у вигляді одновимірних масивів. Другий етап - двовимірне числове інтегрування комплексної функції (1). Функції $p(s)$ і $w(s)$ є досить гладкими, тому немає потреби використовувати велику кількість їх значень, щоб отримати точний результат. В результаті виходить плоский перетин ФРТ, який представлений у вигляді двовимірного масиву 256x256 елементів, що відповідає діапазону $[-4 \cdot x_{MIN} \dots +4 \cdot x_{MIN}]$ у площині об'єкта та $[-4 \cdot z_{MIN} \dots +4 \cdot z_{MIN}]$ у осьовому напрямку (6). Значення ФРТ кожної ОС були розраховані за допомогою формул (2)-(4) протягом декількох годин на стандартному персональному комп'ютері. Застосування паралельного програмування для двовимірної інтеграції може істотно скоротити час розрахунків ФРТ.

Результати розрахунків за формулою (2) розглядалися як еталонні, а за формулами (3) і (4) обчислювалась максимальна похибка обчислення відносно еталонного значення, середнє значення абсолютних похибок і середня квадратичне значення похибки. Ці похибки були розраховані для плоских перетинів та профілів ліній ФРТ (таблиця 2).

Таблиця 2 – Максимальна та середня квадратична похибки обчислень ФРТ

Орієнтація профілю лінії: кут між оптичною віссю і профілем лінії, кут. град.	Максимальна похибка, %		Середня квадратична похибка, %	
	Апроксимація ФРТ $h_F(x,y,z)$	Апроксимація ФРТ $h_{FA}(x,y,z)$	Апроксимація ФРТ $h_F(x,y,z)$	Апроксимація ФРТ $h_{FA}(x,y,z)$
<i>Zeiss EC Eiplan Achromat 100x/0.95</i>				
0 (аксіальний розподіл)	0.838	0.012	0.220	0.004
$\sigma_A/2$	2.536	0.006	0.619	0.001
σ_A	2.670	0.002	0.775	0.000
$(\pi/2 + \sigma_A)/2$	2.675	0.001	0.771	0.000
$\pi/2$ (латеральний розп.)	2.678	0.000	0.770	0.000
<i>Zeiss EC Eiplan Neofluar 20x/0.50</i>				
0 (аксіальний розподіл)	0.038	0.015	0.009	0.004
$\sigma_A/2$	0.435	0.008	0.101	0.002
σ_A	0.480	0.004	0.170	0.001
$(\pi/2 + \sigma_A)/2$	0.491	0.001	0.153	0.000
$\pi/2$ (латеральний розп.)	0.492	0.000	0.147	0.000
<i>Zeiss EC Eiplan Neofluar 10x/0.25</i>				
0 (аксіальний розподіл)	0.035	0.033	0.010	0.010
$\sigma_A/2$	0.110	0.017	0.024	0.003
σ_A	0.118	0.009	0.039	0.002
$(\pi/2 + \sigma_A)/2$	0.119	0.002	0.037	0.001
$\pi/2$ (латеральний розп.)	0.118	0.000	0.035	0.000
<i>Zeiss EC Eiplan Neofluar 5x/0.13</i>				
0 (аксіальний розподіл)	0.063	0.063	0.019	0.019
$\sigma_A/2$	0.043	0.032	0.009	0.006
σ_A	0.034	0.017	0.012	0.005
$(\pi/2 + \sigma_A)/2$	0.033	0.002	0.010	0.001
$\pi/2$ (латеральний розп.)	0.032	0.000	0.010	0.000
<i>Zeiss EC Eiplan Neofluar 2.5x/0.06</i>				
0 (аксіальний розподіл)	0.149	0.149	0.046	0.046
$\sigma_A/2$	0.076	0.074	0.015	0.015
σ_A	0.042	0.040	0.012	0.012
$(\pi/2 + \sigma_A)/2$	0.008	0.002	0.002	0.001
$\pi/2$ (латеральний розп.)	0.007	0.000	0.002	0.000

Сучасні цифрові камери для оптичної мікроскопії мають 12-16 біт аналого-цифрового перетворювача, і їх потрібно правильно вибрати для заданого об'єктива [9]. Це означає, що похибка розрахунків 3D ФРТ повинна бути 0,001-0,02%. На практиці необхідно пам'ятати про аберації та розсіювання в ОС, шуми в цифрових камерах та інші фактори, які збільшують допустиму похибку до 0,1-0,5 %.

Аналіз результатів (табл. 2) показує, що для малих апертур ($NA/n < 0,2$) усі формули дають значення ФРТ, як передбачає класична теорія [3]. Для ОС з великими апертурами формули (2) та (4) є досить близькими, оскільки вони використовують функцію $w(s)$. Ми можемо пояснити цей факт: різниця шляхів між $|AB|$ та $|AF|$ майже дорівнює проекції вектору \vec{r} на вектор \vec{s} , ця проекція позначена як $|FC|$ (Рис. 1). Ця проекція пропорційна скалярному добутку \vec{r} і \vec{s} , і тому у випадках ОС з малими апертурами ФРТ може розраховуватися з застосуванням зворотного перетворення Фур'є. Для ОС з великою апертурою треба враховувати вплив вагового коефіцієнту w : нехтування цим коефіцієнтом у формулі (3) збільшує похибку обчислень ФРТ у 10 разів до 0.5-1%. Але числові дані показують, що відмінності у значеннях, отриманих за допомогою (2) та (4), існують і вони досягають 0,01%.

ВИСНОВКИ

1. Запропоновано метод і математичний апарат для розрахунку трьохвимірної ФРТ ОС на основі принципу Гюйгенса-Френеля, в якому використовують декартові кутові координати та двовимірне інтегрування на поверхні зіниці ОС без застосування наближень Френеля та Фраунгофера. Метод дозволяє врахувати амплітудну та фазову модуляцію у відповідній фокальній площині, а також вплив хвильової аберації.

2. Запропоновано апроксимацію математичного виразу для розрахунку трьохвимірної ФРТ ОС, яка базується на заміні точної формули обчислення відстані між двома точками скалярним добутком векторів \vec{r} і \vec{s} . Результати розрахунку трьохвимірної ФРТ є співставними з результатами, отриманими за допомогою такого скалярного добутку. Для апроксимації доведено, що ФРТ ОС з малою апертурою можна визначити як результат зворотного перетворення Фур'є від автокореляції функцій зіниці. Таким чином, оптична передавальна функція некогерентної ОС з малою апертурою достовірно обчислюється як автокореляція функції зіниці без застосування наближень Френеля та Фраунгофера.

3. Для ОС із великою апертурою ($NA > 0,5$) потрібно обов'язково враховувати нахил променів, що задається відповідним ваговим коефіцієнтом. Це дозволяє зменшити максимальну похибку при обчисленні ФРТ з 1% до 0.02% навіть при використанні скалярного добутку векторів (замість евклідової відстані між двома точками). Похибки обчислення значень ФРТ в межах $< 0.1\%$ є припустимими у інженерній практиці. Тому запропонована апроксимація виразів для розрахунку ФРТ забезпечує точність, прийнятну для багатьох практичних задач дослідження характеристик ОС.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Goodman J. W., [Introduction to Fourier optics], McGrawHill, SanFrancisco (1968).
2. Born M., Wolf E., [Principles of Optics, 5th ed.], Pergamon, Oxford (1975).
3. Sheppard C., "Three-dimensional transfer functions," SPIE Proc. 3831, 166 - 171 (2000).
4. Smith C. W., Botcherby E. J., Wilson T., "Resolution of oblique-plane images in sectioning microscopy," Optics express 19 No 3, 2664 - 2669 (2011)
5. Schonle A., Hell B. W., "Calculation of vectorial three-dimensional functions in large-angle focusing systems," J.Opt. Soc. Am. A 19 No. 10, p. 2121 -2126 (2002).
6. Borovytsky V., Chorna V., "Intensity distribution near focal point of high aperture optical system formed by partly polarized light," SPIE Proc. 7427, 09.1 - 09.12 (2009).
7. Smith W. J., [Lens design: a resource manual], McGrawHill, Boston (1992).

8. Carl Zeiss Microscopy GmbH, "Objectives from Carl Zeiss. Exceeding Your Expectations," Carl Zeiss Microscopy GmbH, Jena (2007).
9. Borovytsky V., "Digital optical microscope as a sampled imaging system: mathematical description, camera selection and focusing," SPIE Proc. 8486, 0D.1 - 0D.12 (2012).

БОРОВИЦЬКИЙ ВОЛОДИМИР МИКОЛАЙОВИЧ – д.т.н., професор кафедри комп'ютерно-інтегрованих оптичних та навігаційних систем приладобудівного факультету НТУУ «КПІ ім. І.Сікорського», м. Київ, Україна, тел.: +380-44-204-94-77, e-mail: vborovytsky@yahoo.com

ГУДЗЬ ОЛЕКСІЙ ЄВГЕНІЙОВИЧ – аспірант кафедри комп'ютерно-інтегрованих оптичних та навігаційних систем приладобудівного факультету НТУУ «КПІ ім. І.Сікорського», м. Київ, Україна

ТУЖАНСЬКИЙ СТАНІСЛАВ ЄВГЕНОВИЧ – к.т.н., доцент кафедри лазерної та оптикоелектронної техніки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Україна