

УДК 004.92

О. В. МЕЛЬНИК, О. Н. РОМАНЮК, О. Я. СТАХОВ

## ЕФЕКТИВНІСТЬ ВИКОРИСТАННЯ ГЕКСАГОНАЛЬНОГО РАСТРА ПРИ ПОБУДОВІ ПІКСЕЛІВ У ПРИСТРОЯХ ВІДОБРАЖЕННЯ

*Вінницький національний технічний університет, 21021, вул. Хм. шосе, 95, м. Вінниця, Україна*

**Анотація.** Проведено теоретичні розрахунки для одиничного елемента гексагонального растру. Проаналізовано та доведено, що гексагональна решітка дає найнижче співвідношення периметра до площі заповнення площини будь-якими рівносторонніми багатокутниками. Таким чином, базуючись на розрахунках, для гексагональної решітки ефект крайового аліазингу зменшено до мінімуму.

**Ключові слова:** антиаліазинг, гексагональний растр, піксель, реалістичність зображень.  
**Abstract.** Theoretical calculations for a single element of a hexagonal raster are considered. It has been analyzed and proven that the hexagonal lattice gives the lowest ratio of perimeter to area covering the plane of any equilateral polygons. Thus, based on the calculations, the edge aliasing effect is reduced to a minimum for the hexagonal lattice.

**Key words:** anti-aliasing, step effect, hexagonal raster, pixel, realism of images

DOI:10.31649/1681-7893-2024-47-1-28-33

### ВСТУП

З метою підвищення якості формування графічних зображень в пристроях відображення використовують гексагональний растр, який має ряд особливостей, що пов'язані з геометрією гексагона [1-5].

Мета роботи – дослідити та теоретично обґрунтувати переваги у використанні гексагонального растра, для досягнення кращого мінімального ефекту крайового аліазингу, базуючись на мінімальному співвідношенні площі до периметру одиничного елемента растру.

### ЗАМОЩЕННЯ ПЛОЩИНИ РІВНОСТОРОННІМИ БАГАТОКУТНИКАМИ

Для повного, неперервного замощення чи заповнення площини без розривів і накладань, як структурний елемент, може бути застосовано лише три види рівносторонніх багатокутників [1-3], а, саме, рівносторонній трикутник, рівносторонній чотирикутник (квадрат) і рівносторонній шестикутник (гексагон) (рис.1). Також площину можна замостити (заповнити) без розривів і накладань прямокутниками будь-якої пропорції сторін [4-5].

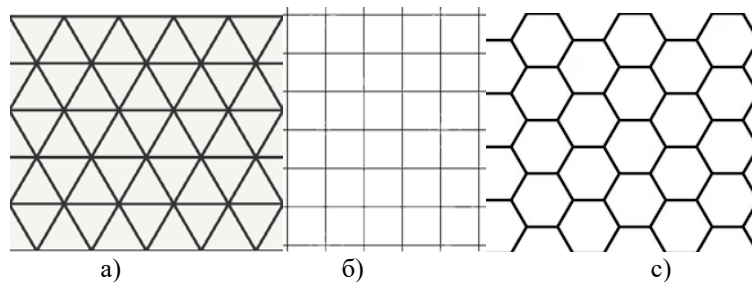


Рисунок 1 - Замощення площини багатокутниками

# МЕТОДИ ТА СИСТЕМИ ОПТИКО-ЕЛЕКТРОННОЇ І ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ ЗОБРАЖЕНЬ ТА СИГНАЛІВ

При замошенні рівностороннім трикутником одиничної площі, площа розраховується за формулою [7, 8]:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \quad (1)$$

При  $S=1$ ,  $a = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}} \approx 1,5209$ , а отже периметр  $P=3 \cdot a=3 \cdot 1,5209=4,56$ .

При замошенні рівностороннім прямокутником (квадратом) одиничної площі, площа  $S=1$ , а периметр  $P=4a=4$ .


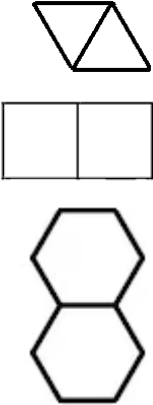
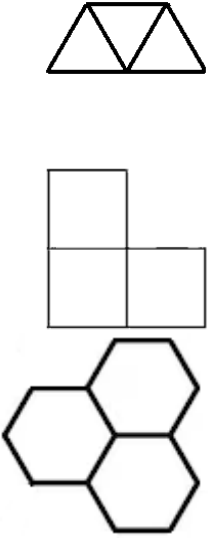
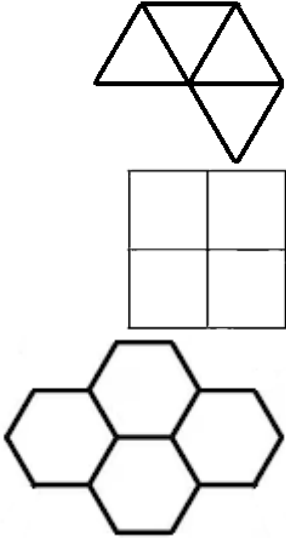
При замошенні рівностороннім шестикутником (гексагоном) одиничної площі, площа розраховується за формулою:

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 \quad (2)$$

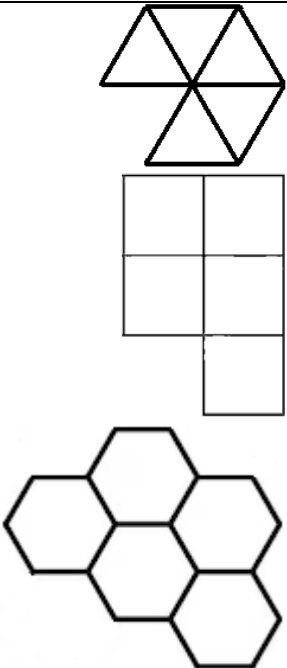
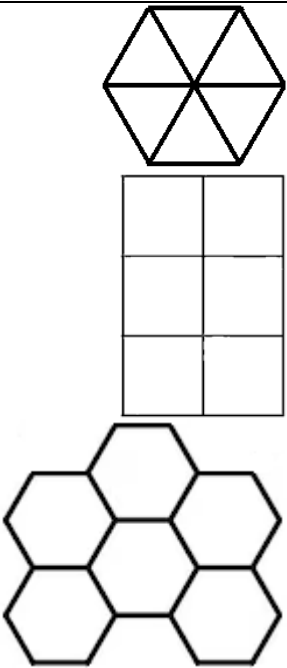
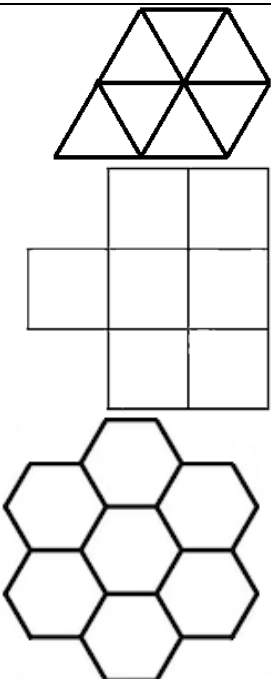
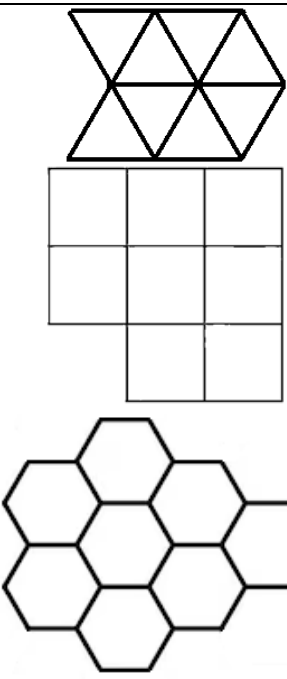
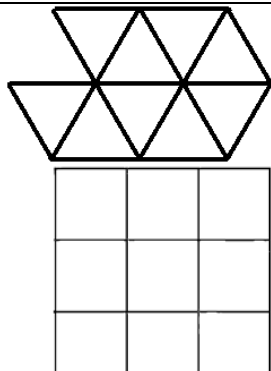
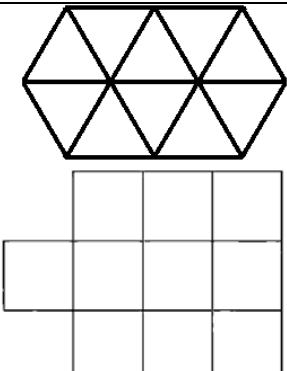
При  $S=1$ ,  $a = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}} \approx 0,6204$ , а отже периметр  $P=6 \cdot a=6 \cdot 0,6204=3,7224$ .

Проведені розрахунки для різної кількості багатокутників з одиничною площею (таблиця 1).

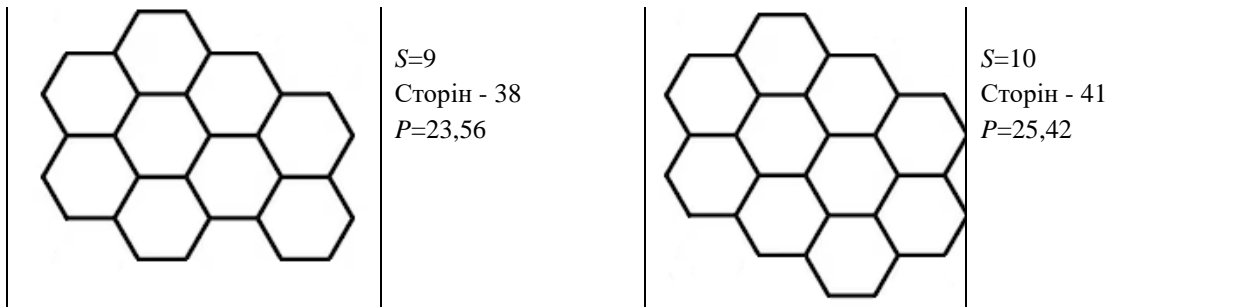
Таблиця 1

Довжина ребер багатокутників одиничної площі			
Багатокутники	Співвідношення площ і периметрів	Багатокутники	Співвідношення площ і периметрів
	$S=1$ Сторін - 3 $P=4,56$ $S=1$ Сторін - 4 $P=4$ $S=1$ Сторін - 6 $P=3,722$		$S=2$ Сторін - 5 $P=7,6$ $S=2$ Сторін - 7 $P=7$ $S=2$ Сторін - 11 $P=6,82$
	$S=3$ Сторін - 7 $P=10,64$ $S=3$ Сторін - 10 $P=10$ $S=3$ Сторін - 15 $P=9,3$		$S=4$ Сторін - 9 $P=13,68$ $S=4$ Сторін - 12 $P=12$ $S=4$ Сторін - 19 $P=11,78$

**МЕТОДИ ТА СИСТЕМИ ОПТИКО-ЕЛЕКТРОННОЇ І ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ  
ЗОБРАЖЕНЬ ТА СИГНАЛІВ**

	<p><math>S=5</math> Сторін - 11 <math>P=16,72</math></p> <p><math>S=5</math> Сторін - 15 <math>P=15</math></p> <p><math>S=5</math> Сторін - 23 <math>P=14,26</math></p>		<p><math>S=6</math> Сторін - 12 <math>P=18,24</math></p> <p><math>S=6</math> Сторін - 17 <math>P=17</math></p> <p><math>S=6</math> Сторін - 27 <math>P=16,74</math></p>
	<p><math>S=7</math> Сторін - 14 <math>P=21,28</math></p> <p><math>S=7</math> Сторін - 20 <math>P=20</math></p> <p><math>S=7</math> Сторін - 30 <math>P=18,6</math></p>		<p><math>S=8</math> Сторін - 16 <math>P=24,32</math></p> <p><math>S=8</math> Сторін - 22 <math>P=22</math></p> <p><math>S=8</math> Сторін - 34 <math>P=21,08</math></p>
	<p><math>S=9</math> Сторін - 18 <math>P=27,36</math></p> <p><math>S=9</math> Сторін - 24 <math>P=24</math></p>		<p><math>S=10</math> Сторін - 19 <math>P=28,88</math></p> <p><math>S=10</math> Сторін - 27 <math>P=27</math></p>

## МЕТОДИ ТА СИСТЕМИ ОПТИКО-ЕЛЕКТРОННОЇ І ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ ЗОБРАЖЕНЬ ТА СИГНАЛІВ



Розрахунки показують, що шестикутник одиничної площі має найменше значення периметру сторін, при площі одиничного розміру, з усіх багатокутників, та, незалежно від кількості гексагональних елементів одиничної площі, які заможують площину. Така геометрична особливість гексагонів зекономить матеріали при виробництві пікселів в моніторах, датчиках, екранах, плазмових панелях. Також це підтверджує властивість рівносторонніх багатокутників з кутами  $n$ , що при  $S=1$ , коли  $n \rightarrow \infty$  то  $P \rightarrow \min$ .

### ВИЗНАЧЕННЯ ЗАГАЛЬНОЇ КІЛЬКОСТІ ТА ДОВЖИНИ ВСІХ РЕБЕР

Визначимо кількість ребер і суму довжин ребер для багатокутників, у випадку замощення площини квадратами та замощення такої ж за розмірами площини гексагонами (рис 1. б, с). Для цього знайдемо кількість всіх ребер елементів решітки для квадрата та для гексагона, а також загальну довжину всіх ребер для квадрата та гексагона, при умові, що квадратна та гексагональна решітки мають однакову кількість елементів (рис. 2).

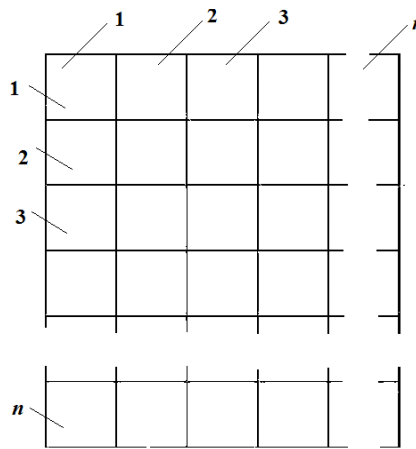


Рисунок 2 - Кількість ребер квадратної решітки

Відповідна квадратна решітка (рис.2) екрану містить  $n$ -стовпців і  $n$ -рядків, а довжина одного ребра дорівнює 1 (оскільки  $S=1$ ), тому загальну кількість ребер та сумарне значення довжин всіх ребер у такій решітці можна виразити формулою:

$$R_{кв} = (1 \cdot n + 1) \cdot n + (1 \cdot n + 1) \cdot n = 2(n + 1) \cdot n = 2n^2 + 2n \quad (3)$$

$$R_{кв} = \underbrace{(n+1)}_{\text{довжина рядка}} \cdot \underbrace{n}_{\text{стовбець}} + \underbrace{(n+1)}_{\text{довжина стовбця}} \cdot \underbrace{n}_{\text{рядок}} = 2(n+1) \cdot n = 2n^2 + 2n$$

Для гексагональної решітки екрану (рис.3), яка теж містить  $n^2$  кількість комірок, загальна кількість ребер та сумарне значення довжин всіх ребер у такій решітці буде:

## МЕТОДИ ТА СИСТЕМИ ОПТИКО-ЕЛЕКТРОННОЇ І ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ ЗОБРАЖЕНЬ ТА СИГНАЛІВ

$$R_{сек} = a \cdot (2 \cdot n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot n + (n-1)) = a \cdot (3 \cdot n^2 + 4 \cdot n - 1) = 3an^2 + 4an - a \quad (4)$$

Де  $a$  – довжина одного ребра,  $a=0,6204$ .

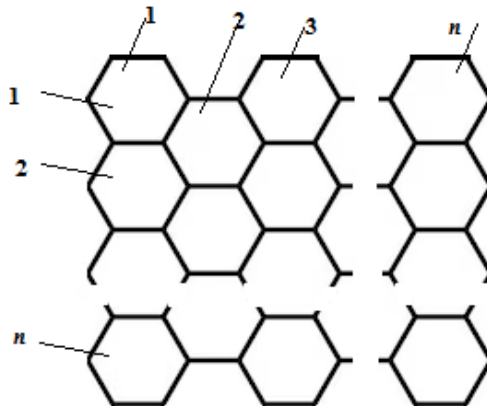


Рисунок 3 - Кількість ребер гексагональної решітки

Порівнявши формулу (3) та формулу (4) у яких біля  $n^2$  різні коефіцієнти:  $3a=1,8612 < 2$ , отже слідує, що  $R_{сек} < R_{кв}$  при будь яких значеннях  $n$ . Крім того, при збільшенні одиничних елементів растру різниця  $R_{кв} - R_{сек}$  зростає. Це також підтверджується простою підстановкою значень (таблиця 2).

Таблиця 2

Сумарне значення довжин всіх ребер

	$n$				
	2	3	4	5	...
$R_{кв} = 2n^2 + 2n$	12	24	40	60	>
$R_{сек} = 3an^2 + 4an - a$	11,78	23,56	39,06	58,28	<

### ВИСНОВКИ

Проаналізовано та доведено, що гексагональна решітка дає найнижче співвідношення периметра до площі заомощення площини будь якими рівносторонніми багатокутниками. На практиці це означає, що для гексагональної решітки ефект крайового аліайзингу зменшено до мінімуму. Також використання гексагональної решітки зекономить матеріали при виробництві пікселів в моніторах, датчиках, екранах, плазмових панелях.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Bell S., Fred H. and Mason D., "A digital geometry for hexagonal pixels", Image and Vision Computing, V. 7, No. 3, pp. 194-204, 1989.
2. Luczak E. and Rosenfeld A., "Distance on a hexagonal grid", IEEE Transactions on Computers, V.C-25., No. 5, pp. 532-533, 1976.
3. Carstens B. and Quinn M., "Hexagonal domain transform for shape analysis", Intelligent Robots and Computer Vision X: Algorithms and Techniques, SPIE, V.1607, pp. 197-205, 1991.
4. Wuthrich C. A. and Stucki P., "An Algorithmic Comparison Between Square and Hexagonal-based Grid" CVGIP: Graphical Models and Image Processing, Vol. 53, pp. 324-339, 1999.
5. Романюк О. Н., та Мельник О. В., "Особливості використання гексагонального растра при побудові пристроїв відображення", Міжнародний науково-технічний журнал «Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах», Хмельницький, №3 (56), с. 105-109, 2016.
6. Гінзбург М. М. та. Путятін Є. П., "Порівняльний аналіз прямокутної та гексагональної ґраток для

---

---

## МЕТОДИ ТА СИСТЕМИ ОПТИКО-ЕЛЕКТРОННОЇ І ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ ЗОБРАЖЕНЬ ТА СИГНАЛІВ

---

---

- дискретизації кривих”, Біоніка інтелекту № 2 (79), с. 13-18, 2012
7. Olexander N. Romanyuk, Sergii V. Pavlov, and etc. "A function-based approach to real-time visualization using graphics processing units", Proc. SPIE 11581, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High Energy Physics Experiments 2020, 115810E (14 October 2020); <https://doi.org/10.1117/12.2580212>.
  8. Leonid I. Timchenko, Natalia I. Kokriatskaia, Sergii V. Pavlov, and etc. "Q-processors for real-time image processing", Proc. SPIE 11581, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High Energy Physics Experiments 2020, 115810F (14 October 2020); <https://doi.org/10.1117/12.2580230>.

### REFERENCES

1. Bell S., Fred H. and Mason D., "A digital geometry for hexagonal pixels", Image and Vision Computing, V. 7, No. 3, pp. 194-204, 1989.
2. Luczak E. and Rosenfeld A., "Distance on a hexagonal grid", IEEE Transactions on Computers, V.C-25., No. 5, pp. 532-533, 1976.
3. Carstens B. and Quinn M., "Hexagonal domain transform for shape analysis", Intelligent Robots and Computer Vision X: Algorithms and Techniques, SPIE, V.1607, pp. 197-205, 1991.
4. Wuthrich C. A. and Stucki P., "An Algorithmic Comparison Between Square and Hexagonal-based Grid" CVGIP: Graphical Models and Image Processing, Vol. 53, pp. 324-339, 1999.
5. Romaniuk O. N. and Melnyk O. V., "Osoblyvosti vykorystannia heksahonalnogo rastra pry pobudovi prystroiv vidobrazhennia ", *Vymiriuvalna ta obchysluvalna tekhnika v tekhnolohichnykh protsesakh*, №3 (56), pp. 105-109, 2016.
6. Hinzburh M. M. and Putiatin Ye. P., "Porivnialnyi analiz priamokutnoi ta heksahonalnoi gratok dlia dyskretyzatsii kryvykh", Біоніка інтелекту № 2 (79), pp. 13-18, 2012.
7. Olexander N. Romanyuk, Sergii V. Pavlov, and etc. "A function-based approach to real-time visualization using graphics processing units", Proc. SPIE 11581, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High Energy Physics Experiments 2020, 115810E (14 October 2020); <https://doi.org/10.1117/12.2580212>.
8. Leonid I. Timchenko, Natalia I. Kokriatskaia, Sergii V. Pavlov, and etc. "Q-processors for real-time image processing", Proc. SPIE 11581, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High Energy Physics Experiments 2020, 115810F (14 October 2020); <https://doi.org/10.1117/12.2580230>.

*Надійшла до редакції 21.05.2024р.*

**МЕЛЬНИК ОЛЕКСАНДР ВАСИЛЬОВИЧ** – к.т.н., старший викладач кафедри програмного забезпечення, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна, ***e-mail:*** [vinncei@gmail.com](mailto:vinncei@gmail.com)

**РОМАНЮК ОЛЕКСАНДР НИКИФОРОВИЧ** – д.т.н., професор, завідувач кафедри програмного забезпечення, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна, ***e-mail:*** [rom8591@gmail.com](mailto:rom8591@gmail.com).

**СТАХОВ ОЛЕКСІЙ ЯРОСЛАВОВИЧ** - Ph.D., доцент завідувач кафедри програмного забезпечення, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна, ***e-mail:*** [aleksey.stahov@gmail.com](mailto:aleksey.stahov@gmail.com)

O.V. MELNYK, O.N. ROMANYUK, O.YA. STAKHOV

**EFFICIENCY OF USING HEXAGONAL RASTER IN PRODUCING PIXELS IN DISPLAY DEVICES**

Vinnitsia National Technical University, 21021, str. Hm. Shosse, 95, Vinnitsia, Ukraine