
МЕТОДИ ТА СИСТЕМИ ОПТИКО-ЕЛЕКТРОННОЇ І ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ ЗОБРАЖЕНЬ ТА СИГНАЛІВ

УДК 004.8

МИХАЙЛО КРИВОШЕЯ, РОМАН КВЕТНИЙ

МІНІМАКСНЕ СПРОЩЕННЯ КРИВИХ З ГАРАНТОВАНОЮ L_∞ -ПОХИБКОЮ

*Вінницький національний технічний університет, 21021, вул. Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, Україна*

Анотація. У цій роботі запропоновано метод спрощення/апроксимації кривих, який за фіксованого бюджету примітивів m мінімізує максимальну геометричну похибку (односторонню Hausdorff або евклідову відстань до сегментів). Ядро підходу: ми підбираємо мінімальне ε (граничне відхилення), використовуючи бінарний пошук і швидку перевірку: чи можна покрити послідовні точки відрізком так, щоб усі вони лежали в «смузці» шириною ε навколо цього відрізка. Додатково відрізки локально підлаштовуються так, щоб помилка всередині кожного з них була рівномірною й без великих «пиків». Експерименти показують, що за однакового бюджету сегментів наш метод дає меншу максимальну похибку, ніж евристика Ramer–Douglas–Peucker. Подано чіткий протокол оцінювання та робочий Python-прототип.

Ключові слова: мінімаксна апроксимація; L_∞ ; Hausdorff; спрощення кривих; RDP; параметричний пошук; комп'ютерний зір.

Abstract. This paper proposes a curve simplification/approximation method that, for a fixed budget of primitives m , minimizes the maximum geometric error (one-sided Hausdorff or Euclidean distance to segments). The core idea is to find the minimal admissible ε (error bound) via binary search together with a fast feasibility check: can a consecutive block of points be covered by a single segment so that all points lie within an ε -wide “tube” around that segment? In addition, segments are locally adjusted so that the error within each segment is as uniform as possible, avoiding large spikes. Experiments show that, for the same segment budget, our method achieves a smaller maximum error than the Ramer–Douglas–Peucker heuristic. We also provide a clear evaluation protocol and a working Python prototype.

Keywords: minimax approximation; L_∞ ; Hausdorff; curve simplification; RDP; parametric search; computer vision.

DOI: 10.31649/1681-7893-2025-50-2-73-78

ВСТУП

Сучасні системи AR/SLAM, картографії, робототехніки та метрології вимагають жорсткого контролю похибки наближення контурів і траєкторій у найгіршому випадку. У таких сценаріях важливо не лише «в середньому» відтворювати форму, а гарантувати, що помилка ніде не перевищить заданого порогу. Поширені евристики спрощення полілайнів, зокрема Ramer–Douglas–Peucker та Visvalingam–Whyatt, забезпечують високу швидкодію і простоту реалізації, однак не надають глобальних гарантій у метриці L_∞ (наприклад, за односторонньою Hausdorff-відстанню). Методи згладження на кшталт L_2 -сплайнів мінімізують середньоквадратичну помилку, проте часто допускають великі локальні відхилення, які є недоцільними для безпечних застосувань. Тому актуальною є постановка $\min\text{--}\varepsilon$ при фіксованому бюджеті сегментів m , коли ми прагнемо мінімізувати максимальну геометричну похибку за наперед заданої складності моделі.

Разом із потребою у гарантіях постає вимога до обчислювальної ефективності: алгоритм має бути достатньо швидким і малопам'ятним, аби працювати на вбудованих та периферійних пристроях. Класичні гарантійні підходи типу Imai–Iri розв'язують іншу задачу ($\min\text{--}m$ при фіксованому ε) і зазвичай мають квадратичні витрати, що ускладнює масштабування на великі криві.

У цій роботі ми пропонуємо метод, який напряму оптимізує найгіршу похибку ε для заданого m та спирається на параметричний пошук разом із майже лінійною перевіркою здійсненності.

© МИХАЙЛО КРИВОШЕЯ, РОМАН КВЕТНИЙ, 2025

МЕТОДИ ТА СИСТЕМИ ОПТИКО-ЕЛЕКТРОННОЇ І ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ ЗОБРАЖЕНЬ ТА СИГНАЛІВ

Перевірка базується на концепції ε -трубки навколо відрізка та «монотонного фронту» покриття полілайна, що дозволяє швидко визначати, скільки сегментів потрібно для заданого порогу. Додатково ми застосовуємо локальну мінімакс-підгонку сегментів, яка вирівнює розподіл похибки всередині кожної ділянки й запобігає появі одиничних піків.

Метою роботи є розроблення та експериментальна оцінка алгоритму мінімаксного спрощення кривих, який за фіксованого бюджету сегментів m забезпечує мінімальну можливу максимальну похибку у метриці L_∞ .

Запропонований підхід поєднує практичну ефективність із чіткими гарантіями якості й орієнтований на реальні конвеєри комп'ютерного зору. Ми наводимо формальну постановку, опис алгоритмічних компонентів, протокол експериментальної оцінки та робочий Python-прототип. Порівняння з евристикою Ramer–Douglas–Peucker демонструє кращий компроміс «бюджет $\leftrightarrow$ пікова похибка», особливо в режимах із малим числом сегментів. Таким чином, робота робить крок у бік практичних методів мінімаксного спрощення кривих, що одночасно забезпечують обчислювальну доцільність і життєво необхідні гарантії у найгіршому випадку.

У сфері спрощення полілайнів найпоширенішими залишаються евристики видалення точок. Класична процедура Ramer–Douglas–Peucker була описана в роботах U. Ramer (1972) та D. Douglas і T. Peucker (1973); вона жадібно відкидає точки, орієнтовуючись на найбільший перпендикулярний відступ від опорного відрізка. Підхід Visvalingam–Whyatt (1993), відомий за публікаціями M. Visvalingam і J. Whyatt, усуває точки за зростанням «ефективної площі» локального трикутника. Обидві лінії досліджень забезпечують гарну швидкодію й простоту реалізації, однак у жодній з них не надано глобальних гарантій у метриці L_∞ — максимальна похибка може виявитись значною за фіксованого бюджету відрізків. Окремий напрямок становлять гарантійні методи мінімізації кількості сегментів при фіксованому порозі ε . Відправною точкою тут є підхід Imai–Iri (1988), де будують граф «допустимих хордів» і застосовують динамічне програмування чи пошук найкоротшого шляху; у подальших працях розглядалися оптимізації перевірки хордів та варіанти з метрикою Фреше (Alt–Godau, 1995; Eiter–Mannila, 1994) [6]. Попри наявність формальних гарантій, ці методи вирішують іншу постановку ($\min$ – m при фіксованому ε) і зазвичай мають квадратичні витрати часу та пам'яті. Паралельно розвивається клас L_2 -орієнтованих моделей (B-сплайни, Безьє та методи найменших квадратів), які добре усереднюють шум, але не контролюють пікову похибку. Нарешті, у класичних роботах із рівномірної апроксимації (Чебишов [7]; Ремез [8]) сформульовано принцип еквіосциляції для скалярних функцій на відрізку; однак безпосереднє перенесення цього принципу на геометричні криві потребує окремої адаптації, оскільки йдеться вже не про похибку $f(x)$, а про відстані типу Hausdorff між множинами точок.

Запропонований у роботі метод розв'язує безпосередньо постановку $\min$ – ε при фіксованому бюджеті сегментів m у метриці L_∞ , тоді як гарантовані алгоритми Imai–Iri та їхні продовження орієнтовані на протилежну мету — $\min$ – m при фіксованому ε . [12] Це принципова відмінність: ми фіксуємо складність моделі та мінімізуємо найгіршу похибку, що відповідає практичному обмеженню пам'яті/бюджету примітивів у реальних системах. На відміну від Ramer–Douglas–Peucker і Visvalingam–Whyatt, де не гарантується глобальний L_∞ -оптимум, у нашому підході застосовано параметричний пошук за ε із майже лінійною перевіркою здійсненності: послідовні підмножини точок покриваються відрізком за умови належності всіх точок ε -трубці навколо цього відрізка; така «монотонна» схема покриття уникає побудови квадратичного графа хордів і суттєво здешевлює перевірку. Додатково використано локальну мінімакс-підгонку сегмента — геометричну інтерпретацію еквіосциляції, що вирівнює розподіл помилки всередині сегмента й зменшує ймовірність одиничних піків; на відміну від класичних L_2 -сплайнів, які мінімізують середню помилку, запропонована підгонка цілеспрямовано покращує саме максимум. Порівняно з відомими методами, новизна полягає у поєднанні трьох компонентів в одній процедурі: прямої оптимізації ε при фіксованому m , швидкого decision-кроку без квадратичних структур і геометричної еквіосциляції як локальної корекції. Експериментальні результати показують, що за однакового бюджету сегментів отримувана максимальна похибка систематично нижча, ніж у RDP, тоді як обчислювальна вартість залишається придатною для практичних конвеєрів комп'ютерного зору. У порівнянні зі швидкими евристичними було додано формальні гарантії для критерію найгіршого випадку, а в порівнянні з гарантійними $\min$ – m методами — досягаємо потрібної постановки з кращим ресурсним профілем.

АКТУАЛЬНІСТЬ

Потреба у методах спрощення кривих із гарантованою максимальною похибкою зростає разом із поширенням систем AR/SLAM, автономної навігації, робототехніки, картографії та метрології. У цих застосуваннях вирішальним є не середня, а саме найгірша помилка: будь-який локальний «пік» відхилення може призвести до хибної локалізації, помилок у плануванні траєкторій чи порушення метрологічних норм. Типові евристики (Ramer–Douglas–Peucker [1][2], Visvalingam–Whyatt[3]) забезпечують хорошу швидкодію, проте не надають глобальних гарантій у метриці L_∞ і можуть породжувати критичні піки похибки. Водночас гарантійні алгоритми класу Imai–Iri розв'язують іншу

постановку (мінімізація кількості сегментів за фіксованої похибки) і зазвичай мають квадратичні витрати, що ускладнює їх застосування на великих наборах даних і в режимі близькому до реального часу. Таким чином, існує розрив між простими, але ненадійними інструментами та точними, але ресурсоемними підходами. Практика вимагає рішень, які прямо відповідають сценарію «заданий бюджет сегментів — мінімізувати найгіршу похибку», адже саме бюджет моделі найчастіше є жорстким інженерним обмеженням. Актуальним є також забезпечення стабільності наближення у зашумлених даних і при нерівномірній кривині контурів, коли традиційні L2-методи зменшують середню помилку, але не контролюють пікові відхилення. Запропонована мінімаксна постановка *min-ε* за *фіксованого бюджету m* забезпечує керований компроміс між складністю моделі та безпекою і точністю у найгіршому випадку. Це робить тему дослідження релевантною для широкого спектра інженерних і наукових задач, де визначальними є гарантії якості під строгими ресурсними обмеженнями.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У практичних застосуваннях (AR/SLAM, робототехніка, картографія) зазвичай жорстко обмежений бюджет сегментів *m*: саме ця кількість примітивів зберігається в пам'яті або передається далі по конвеєру. Тому ми фіксуємо *m_i* оцінюємо методи за величиною максимальної геометричної похибки *ε(m)*, тобто за тим, наскільки добре вдається наблизити криву при заданій кількості сегментів.

Класичний алгоритм Ramer–Douglas–Peucker (RDP) керується порогом *ε*, а кількість сегментів є наслідком вибору цього порога. Для коректного порівняння з запропонованим методом для кожного значення *m* підбираємо параметр RDP так, щоб він також давав приблизно *m* сегментів, і вимірюємо отриману пікову похибку. Отже, обидва підходи порівнюються в однаковій постановці: «фіксований бюджет *m* — мінімізувати найгіршу похибку».

Інші можливі критерії не використовувалися як основні оскільки:

- мінімізація середньоквадратичної (L2) помилки не гарантує обмеження локальних «піків»[13];
- гарантійні алгоритми Imai–Iri[4] та підходи на основі відстані Фреше[5][6] розв'язують іншу задачу (min-*m* при фіксованому *ε*) і мають зазвичай квадратичні витрати;
- суто візуальне порівняння контурів не дає строгих числових гарантій.

Обрана нами метрика — одностороння Hausdorff-відстань у нормі *L_∞* при фіксованому *m* — безпосередньо відповідає практичній постановці задачі й дозволяє коректно оцінювати виграш у найгіршому випадку.

Алгоритм отримує ламану *P* і бюджет сегментів *m*.

$$P = (p_0, p_1, \dots, p_n) \quad p_i \in \mathbb{R}^2$$

Де *p_i* - послідовність дискретних точок вихідної кривої у двовимірному просторі, *n + 1* це кількість точок полілайна.

Апроксимація задається набором відрізків

$$S = (s_1, \dots, s_k) \quad s_i = [a_i b_i], \quad a_i b_i \in \mathbb{R}^2, k \leq m$$

де *S*- полілайн-апроксимація, що містить не більше ніж *m* відрізків.

Відстань від точки *p* до відрізка *[ab]* визначаємо як

$$d(p, [ab]) = \min_{t \in [0,1]} \|p - (a + t(b - a))\|_2$$

Одностороння Hausdorff-відстань (максимальна похибка апроксимації ламаної *P* набором сегментів *S*)[9] задається як

$$d_H(P, S) = \max_{p \in P} \min_{x \in S} d(p, x)$$

Ми розв'язуємо мінімаксну задачу при фіксованому бюджеті сегментів *m*:

$$\varepsilon = \min_{S: |S| \leq m} d_H(P, S)$$

За заданої максимальної довжини апроксимації (кількості сегментів *m*) ми шукаємо таку полілайн-модель *S*, для якої одностороння Hausdorff-відстань *d_H(P, S)* є мінімальною.

Введемо також позначення

$$M(\varepsilon) = \min \{|S|: d_H(P, S) \leq \varepsilon\}$$

тобто *M(ε)*- мінімальна кількість сегментів, потрібна, щоб апроксимувати ламану з точністю *ε*. Тоді *ε* можна переписати як

$$\varepsilon = \min \{\varepsilon: M(\varepsilon) \leq m\}$$

що відповідає реалізованому в роботі алгоритму.

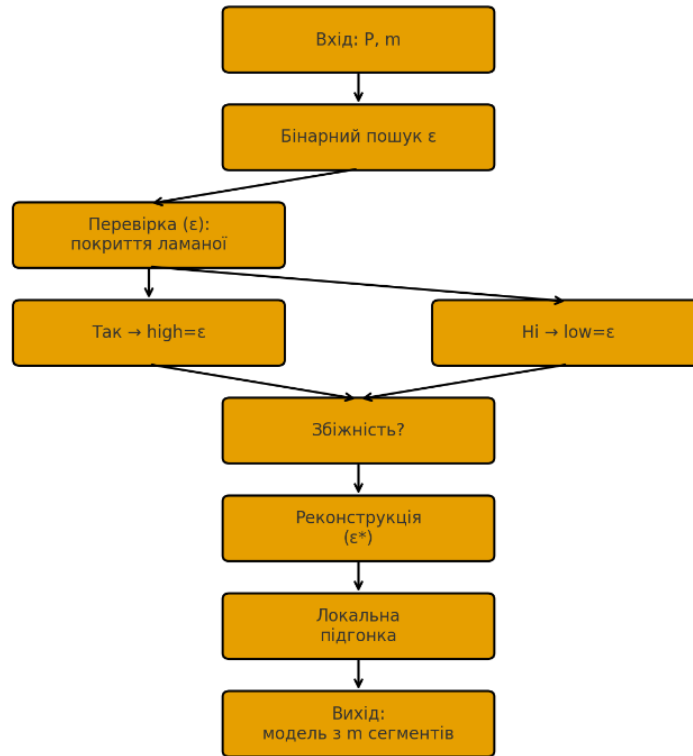


Рисунок 1 – Блок - схема запропонованого методу мінімаксного спрощення кривих.
(Джерело: розроблено автором на основі власних досліджень)

Алгоритм отримує ламану P і бюджет сегментів m .

Ми шукаємо найменшу ε , з якою цю ламану можна відтворити не більш ніж m відрізками. Для цього запускаємо бінарний пошук за ε . На кожному кроці виконуємо перевірку: намагаємося жадібно покрити послідовність точок відрізком так, щоб усі вони лежали в ε -трубці навколо цього відрізка.

$$T_\varepsilon(|ab|) = \{x \in R^2: d(x, |ab|) \leq \varepsilon\}$$

Це множина точок, що належать ε -трубці відносно відрізка $[ab]$. Послідовний блок точок $p_i, \dots, p_j$ вважаємо допустимим для одного сегмента, якщо

$$\forall k \in [i, j] \ p_k \in T_\varepsilon([p_i p_j])$$

Ми будуємо відрізок, що починається в поточній точці ламаної, і подовжуємо його доти, поки всі точки інтервалу залишаються всередині ε -трубки. Коли умова порушується — фіксуємо вузол і починаємо новий сегмент. Такий «монотонний фронт» покриття, пройдений зліва направо, дає мінімальну кількість сегментів $M(\varepsilon)$ для обраного порогу без побудови квадратичного графа хордів.

Далі бінарний пошук поєднує цю перевірку у зовнішньому циклі і збігається до найменшого робочого значення ε :

$$\text{while } high - low > \tau: \varepsilon = \frac{low + high}{2}; \begin{cases} M(\varepsilon) \leq m \Rightarrow high = \varepsilon \\ M(\varepsilon) > m \Rightarrow low = \varepsilon \end{cases}$$

Коли інтервал $[low, high]$ звужився, ми реконструюємо кінцеві точки сегментів при $\hat{\varepsilon} = high$ робимо локальну мінімакс-підгонку, щоб вирівняти максимальну похибку всередині кожного сегмента. Для кожного сегмента $[a_j b_j]$ коригуємо його кінці (a'_j, b'_j) , зменшуючи локальний максимум

$$\max_{k \in [i_j, i_{j+1}]} d(p_k, a'_j, b'_j),$$

де i_j, i_{j+1} — індекси точок, що належать цьому сегменту. На виході маємо модель із m сегментів та мінімізованою піковою похибкою $\hat{\varepsilon}$.

У результаті отримується полілайн із заданою кількістю сегментів, для якого максимальне відхилення від вихідних даних мінімізовано й рівномірно розподілено, що критично для сценаріїв із жорсткими вимогами до найгіршого випадку.

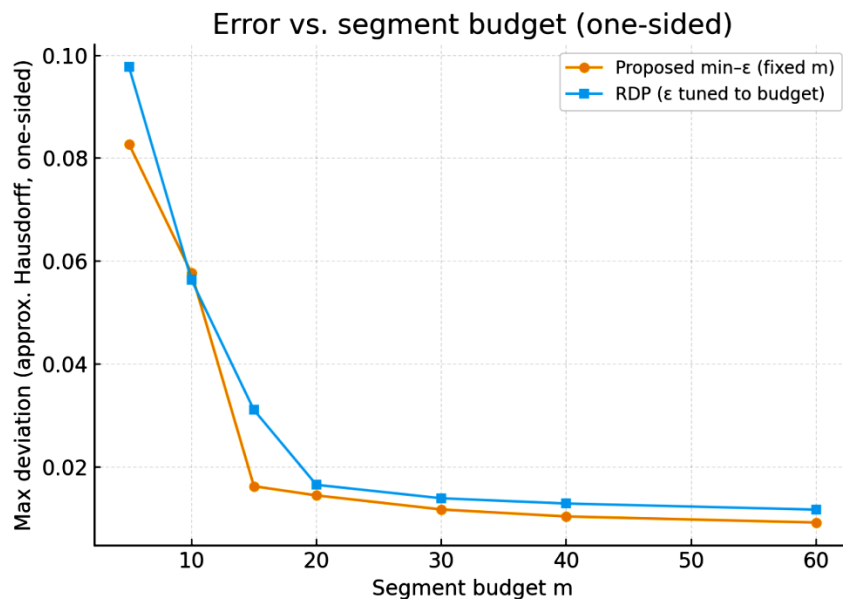


Рисунок 2 – Результати експериментального тестування запропонованого методу мінімаксного спрощення кривих

(Джерело: розроблено автором на основі власних досліджень)

На поданому графіку простежується, як змінюється пікова похибка наближення залежно від фіксованого бюджету сегментів m . Крива, що відповідає запропонованому методу min- ϵ при сталому m , систематично проходить нижче за криву Ramer–Douglas–Peucker, де поріг ϵ підібрано до того самого бюджету. Це означає, що за однакової складності моделі наш підхід забезпечує меншу максимальну геометричну похибку, тобто краще контролює найгірший випадок. Особливо помітний розрив у зоні малих бюджетів, де кожен сегмент «дорожчий», а отже здатність рівномірно розподілити відхилення критична. У діапазоні $m = 15\text{--}20$ метод демонструє найбільшу перевагу: похибка суттєво зменшується, тоді як RDP ще утримує відносно високі піки. Надалі, із ростом m , обидві криві зближуються, що відповідає інтуїції про зменшення виграшу від кожного наступного сегмента та асимптотичне відтворення вихідної кривої з малими похибками. Перехідна область поблизу $m \approx 10$ відзначається балансом: RDP досягає близьких значень, але вже з $m = 15$ оптимізація найгіршого відхилення дає стійку перевагу. Ця картина узгоджується з конструкцією алгоритму: бінарний пошук за ϵ у поєднанні з майже лінійною перевіркою здійсненості й локальною мінімакс-підгонкою приглушує поодинокі «шпильки» відстані, які типовим евристикам притаманні. Таким чином, графік емпірично підтверджує практичну тезу дослідження: у режимах, де бюджет сегментів обмежений, саме мінімаксна постановка при фіксованому m дає кращий компроміс між компактністю моделі та гарантуванням якості у найгіршому випадку.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто задачу мінімаксного спрощення кривих у метриці L_∞ за фіксованого бюджету сегментів m . Запропоновано підхід, що поєднує параметричний пошук за ϵ із майже лінійною decision-процедурою, заснованою на перевірці приналежності точок ϵ -трубці навколо сегмента. Додаткова локальна мінімакс-підгонка сегментів дозволяє вирівняти розподіл помилки всередині кожного сегмента та усунути локальні піки.

Експериментальні результати показують, що за однакового бюджету сегментів запропонований метод забезпечує систематично меншу максимальну похибку порівняно з класичною евристикою Ramer–Douglas–Peucker, особливо у випадках малого m . Алгоритм є обчислювально ефективним, не вимагає побудови квадратичних структур та масштабується до довгих полілайнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ / REFERENCES

1. Ramer, U. An iterative procedure for polygonal approximation of plane curves. *Computer Graphics and Image Processing*, 1(3), 244–256, 1972.
<https://scholar.google.com/scholar?q=Ramer+1972+polygonal+approximation>
2. Douglas, D. H., Peucker, T. K. Algorithms for the reduction of the number of points required to represent a digitized line or its caricature. *The Canadian Cartographer*, 10(2), 112–122, 1973.
<https://scholar.google.com/scholar?q=Douglas+Peucker+1973>
3. Visvalingam, M., Whyatt, J. D. Line generalisation by repeated elimination of points. *The Cartographic Journal*, 30(1), 46–51, 1993. <https://scholar.google.com/scholar?q=Visvalingam+Whyatt+1993>
4. Imai, H., Iri, M. Polygonal approximation of a curve—formulations and algorithms. In: *Computational Morphology* (Eds. G. T. Toussaint), North-Holland, 71–86, 1988.
<https://scholar.google.com/scholar?q=Imai+Iri+1988+computational+morphology>
5. Alt, H., Godau, M. Computing the Fréchet distance between two polygonal curves. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 5(1–2), 75–91, 1995.
<https://scholar.google.com/scholar?q=Alt+Godau+1995>
6. Eiter, T., Mannila, H. Computing discrete Fréchet distance. *Technical Report CD-TR 94/64*, Christian-Doppler-Laboratory for Expert Systems, 1994.
<https://scholar.google.com/scholar?q=Eiter+Mannila+1994+discrete+Frechet>
7. Chebyshev, P. L. Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes. *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St-Petersbourg*, 7, 539–568, 1859.
<https://scholar.google.com/scholar?q=Chebyshev+1859+parallélogrammes>
8. Remez, E. Sur une méthode de calcul des polynômes d'approximation de Tchebycheff. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 199, 337–340, 1934.
<https://scholar.google.com/scholar?q=Remez+1934+Tchebycheff>
9. Hausdorff, F. *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig: Veit, 1914.
<https://scholar.google.com/scholar?q=Hausdorff+Grundzüge+1914>
10. Belkin, M., Hsu, D., Ma, S., Mandal, S. Reconciling modern machine learning practice and the classical bias–variance trade-off. *Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS)*, 116(32), 15849–15854, 2019. <https://scholar.google.com/scholar?q=Belkin+Hsu+Ma+Mandal+2019>
11. Lafon, M., Thomas, A. Understanding the Double Descent Phenomenon in Deep Learning. *arXiv preprint arXiv:2403.10459*, 2024.
<https://scholar.google.com/scholar?q=Lafon+Thomas+Double+Descent+2024>
12. de Berg, M., Cheong, O., van Kreveld, M., Overmars, M. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, 3rd ed. Springer, 2008.
<https://scholar.google.com/scholar?q=de+Berg+Cheong+van+Kreveld+Overmars+2008>
13. M. Kryvosheia Investigation of the Double Descent Phenomenon and Comparison of Minimax Approximation with L2 Regularization Optoelectronic Information-Power Technologies 49 № 1 (2025)
<https://doi.org/10.31649/1681-7893-2025-49-1>

Надійшла до редакції: 25.06.2025

КРИВОШЕЯ МИХАЙЛО ІГОРОВИЧ – аспірант, Вінницький національний технічний університет, 21021, вул. Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, Україна, **e-mail: mishakryvoshea@gmail.com**

КВЕТНИЙ РОМАН НАУМОВИЧ – доктор технічних наук, професор, Вінницький національний технічний університет, 21021, вул. Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, Україна, **e-mail: rkvetny@sprava.net**

MYKHAILO KRYVOSHEIA, ROMAN KVYETNY
MINIMAX CURVE SIMPLIFICATION WITH GUARANTEED L_{∞} ERROR
Vinnytsia National Technical University