

---

---

# ОПТИЧНІ ТА ОПТИКО-ЕЛЕКТРОННІ СЕНСОРИ І ПЕРЕТВОРЮВАЧІ В СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ ТА ЕКОЛОГІЧНОГО МОНІТОРИНГУ

---

---

УДК 512.2

М.П. ДИВАК., В.І. МАНЖУЛА

## ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНА СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЕКОЛОГІЧНИХ СТАНІВ НАВКОЛИШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА

*Західноукраїнський національний університет, Україна*

**Анотація.** В праці запропоновано підхід до побудови дискретно-неперервної стохастичної моделі для розв'язування задач оцінки екологічної безпеки навколишнього середовища. Розроблена марківська модель описує динаміку узагальненого екологічного показника у розширеному фазовому просторі шести екологічних макростанів, який поєднує поточний рівень забруднення та фазу його тренду для врахування інерційності системи. Запропоновано метод ідентифікації екологічних макростанів із використанням порогу чутливості для врахування похибок вимірювань, що дозволило відфільтрувати шум та надійно ідентифікувати переходи між станами екосистеми. Запропонований підхід дозволяє розрахувати стаціонарний розподіл і об'єктивно оцінити частку часу перебування екосистеми у критичних режимах, на відміну від традиційних підходів, що базуються на статичній фіксації поточних перевищень гранично допустимих норм. Верифікацію моделі проведено на експериментальних даних експериментальних вимірювань, отриманих на реальних транспортних вузлах м. Тернополя. На основі знайденого стаціонарного розподілу ймовірностей кількісно визначено профілі екологічного ризику, що дозволило встановити домінуючі стани для досліджуваних територій та визначити характеристики зовнішніх факторів впливу на навколишнє середовище. Розроблена математична модель забезпечує науково обгрунтовану базу для управління антропогенним навантаженням на навколишнє середовище та зниження екологічних ризиків.

**Ключові слова:** математичне моделювання, дискретно-неперервна стохастична модель, екологічний стан, гранично допустима концентрація, навколишнє середовище.

**Abstract.** The paper proposes an approach to constructing a discrete-continuous stochastic model for solving problems of environmental safety assessment. The developed Markov model describes the dynamics of a generalized environmental indicator within an extended phase space of six ecological macrostates, which combines the current pollution level and its trend phase to account for the system's inertia. A method for identifying ecological macrostates using a sensitivity threshold to account for measurement errors is proposed, enabling the filtration of noise and reliable identification of transitions between ecosystem states. The proposed approach allows calculating the steady-state distribution and objectively estimating the proportion of time the ecosystem spends in critical states, unlike traditional approaches based solely on the static recording of current exceedances of maximum permissible limits. The model was verified using experimental measurement data obtained at real transport hubs in Ternopil. Based on the calculated steady-state probability distribution, ecological risk profiles were quantitatively determined, enabling the identification of dominant states for the study areas and the characterization of external environmental impact factors. The developed mathematical model provides a scientifically sound basis for managing anthropogenic load on the environment and mitigating ecological risks.

**Keywords:** mathematical modeling, discrete-continuous stochastic model, ecological state, maximum permissible concentration, environment.

**DOI: 10.31649/1681-7893-2026-51-1-302-312**

### ВСТУП

Забезпечення екологічної безпеки та управління ризиками в умовах інтенсивного антропогенного навантаження вимагають впровадження високоточних математичних моделей у сучасні системи моніторингу довкілля [1, 2]. Традиційні підходи, орієнтовані виключно на статичну фіксацію перевищень гранично допустимих концентрацій (ГДК), мають суттєвий недолік – вони не здатні

---

## ОПТИЧНІ ТА ОПТИКО-ЕЛЕКТРОННІ СЕНСОРИ І ПЕРЕТВОРЮВАЧІ В СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ ТА ЕКОЛОГІЧНОГО МОНІТОРИНГУ

---

врахувати інерційність екологічних процесів та динаміку накопичення забруднюючих речовин [3, 4, 5]. Для ефективного управління екосистемами необхідні інструменти, що дозволяють не лише реєструвати поточне забруднення середовища, а й прогнозувати кінетику переходів між різними екологічними режимами, оцінювати швидкість відновлення навколишнього середовища та визначати ймовірність виникнення критичних станів у короткостроковій перспективі. Аналіз праць [6, 7, 8] свідчить, що використання дискретно-неперервних марківських моделей з урахуванням специфіки локальної місцевості [9, 10] формує комплексну теоретичну базу для моделювання навколишнього середовища. Це підтверджує актуальність розробки дискретно-неперервних стохастичних моделей, здатних одночасно враховувати як інерційність накопичення забруднення, так і специфіку їх розсіювання в різних умовах навколишнього середовища. Такий підхід дозволяє абстрагуватися від специфіки джерел емісії, оперуючи узагальненими показниками стану системи в розширеному фазовому просторі. Використання марківського вкладення надає можливість подолати проблему інерційності процесів забруднення та забезпечити коректне моделювання динаміки екологічного забруднення як марківського процесу першого порядку [6].

Метою дослідження є розробка та формалізація дискретно-неперервної стохастичної моделі, що розглядає життєвий цикл екологічного забруднення навколишнього середовища через множину дискретних станів. Запропонована марківська модель забезпечить врахування значень показників забруднення та тренди їх зміни, що дозволить аналітично розрахувати стаціонарний розподіл ймовірностей та формувати „профіль екологічного ризику досліджуваної території. Це, в свою чергу, забезпечить кількісну оцінку балансу між інтенсивністю техногенного впливу та асиміляційним потенціалом навколишнього середовища, що є критично важливим для прийняття управлінських рішень у сфері екології.

### МЕТОД ПОБУДОВИ ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНА МАРКІВСЬКОЇ МОДЕЛЬ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЕКОЛОГІЧНИХ СТАНІВ НАВКОЛИШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА

Використання екологічних показників для прогнозування стану довкілля пов'язане з проблемою інерційності системи.

Нехай  $E_t = E(t)$  – числовий узагальнений екологічний показник (концентрація забруднення) у момент часу  $t$ . Динаміка реальних екологічних систем характеризується наявністю ефекту післядії (пам'яті), оскільки поточний рівень забруднення залежить від попередніх станів середовища. Математично це описують нелінійною залежністю [11]:

$$E_{t+1} = f(E_t, E_{t-1}, \dots) + \varepsilon_t, \quad (1)$$

де  $f(\cdot)$  – нелінійна функція динаміки екологічного показника,  $\varepsilon_t$  – похибки вимірювальної системи.

Очевидно, що у просторі станів, який описується виключно скалярною величиною  $E_t$ , екологічний процес не є марківським, оскільки порушується ключова умова відсутності післядії:

$$P(E_{t+1} | E_t, E_{t-1}) \neq P(E_{t+1} | E_t).$$

Для можливості коректного застосування апарату ланцюгів Маркова необхідно розширити фазовий простір станів системи шляхом введення трендової компоненти (метод марківського вкладення). Визначимо дискретний тренд  $\theta_t$  як різницю значень показника за крок часу (напрямок його зміни)

$$\theta_t = \text{sign}(E_t - E_{t-1}). \quad (3)$$

Звідси попереднє значення показника можна виразити як:

$$E_{t-1} = E_t - \theta_t. \quad (4)$$

Підставивши цей вираз у початкове рівняння динаміки, отримаємо:

$$E_{t+1} = f(E_t, E_t - \theta_t) + \varepsilon_t. \quad (5)$$

## ОПТИЧНІ ТА ОПТИКО-ЕЛЕКТРОННІ СЕНСОРИ І ПЕРЕТВОРЮВАЧІ В СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ ТА ЕКОЛОГІЧНОГО МОНІТОРИНГУ

Сформуємо розширений вектор стану екологічної системи

$$S_t = (E_t, \theta_t), \quad (6)$$

який містить інформацію як про поточний рівень забруднення, так і про тренд його зміни. Оскільки значення  $E_{t+1}$ , згідно формули (5) тепер повністю визначається компонентами вектора  $S_t$ , а наступне значення тренду  $\theta_{t+1} = E_{t+1} - E_t$  також залежить виключно від поточного стану та випадкового шуму, хоча сама компонента  $\theta_t$  пов'язана з попереднім станом системи  $E_{t-1}$ , у рамках розширеного фазового простору вона розглядається як невід'ємна характеристика поточного моменту  $t$  (аналог миттєвої швидкості у фізичних системах). Звідси значення наступного стану  $S_{t+1}$  повністю визначається компонентами поточного вектора  $S_t$  без необхідності звернення до історії процесу. Загальну динаміку системи опишемо рівнянням:

$$S_{t+1} = F(S_t, \varepsilon_t). \quad (7)$$

За цих умов, для розширеного вектора стану (6) виконується строга марківська властивість:

$$P(S_{t+1}|S_t, S_{t-1}, \dots) = P(S_{t+1}|S_t). \quad (8)$$

Таким чином, для забезпечення марківської властивості опису станів екологічних показників простір станів було розширено шляхом включення трендової компоненти, що дозволяє розглядати процес як марківський першого порядку.

Для побудови простору станів марківської моделі застосуємо операцію декартового добутку двох множин: множини рівнів екологічного показника (концентрації)  $E$  та множини фаз тренду  $\Theta$ .

Нехай множина рівнів концентрації забруднювача (наприклад, сполук азоту або важких металів) розділена на два базові класи  $E = \{L, H\}$ . Множина фаз тренду  $\Theta = \{+, 0, -\}$  визначається на основі швидкості зміни концентрації.

Таблиця 1 – Опис допустимих значень множин опису екологічних станів  $S_t$

Множина	Рівень / фаза тренду	Математична інтерперетация	Екологічна інтерперетация
$E$	$L$ (Low) – нормативний рівень	$E_t \leq E_{ГДК}$	Система функціонує в межах фонових значень або гранично допустимих концентрацій (ГДК).
	$H$ (High) – критичний рівень	$E_t > E_{ГДК}$	Зафіксовано перевищення екологічних нормативів, що несе загрозу для довкілля.
$\Theta$	«+» – висхідна	$\theta_t > \varepsilon$	Стійке зростання концентрації забруднення.
	0 – стабільна	$ \theta_t  \leq \varepsilon$	Коливання концентрації забруднення в межах порогу чутливості.
	«-» – спадна	$\theta_t < -\varepsilon$	Стійке зниження концентрації забруднення.

Декартовий добуток цих множин  $S = E \times \Theta$  формує повний простір із 6 взаємовиключних станів, які описують повний життєвий цикл екологічної системи під дією забруднення:

$$S = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}. \quad (9)$$

Динаміка екологічної системи під впливом антропогенного навантаження має виражений циклічний характер, що зумовлено явищами інерційності та екологічного гістерезису. У межах розробленої марківської моделі повний життєвий цикл екологічного збурення в загальному випадку може описуватися послідовною зміною макроетапів:

*Фон → Накопичення → Пік → Регенерація → Відновлювальний фон.*

## ОПТИЧНІ ТА ОПТИКО-ЕЛЕКТРОННІ СЕНСОРИ І ПЕРЕТВОРЮВАЧІ В СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ ТА ЕКОЛОГІЧНОГО МОНІТОРИНГУ

1. Етап «Фон». Система перебуває у стані спокою, антропогенний вплив мінімальний або стабільний. Стан стабільного фону:

$$S_1 = (L, 0).$$

Базова емісія повністю компенсується асиміляційним потенціалом середовища, тренд відсутній. Концентрація стабільно тримається нижче нормативних показників.

2. Етап «Накопичення». Активізація джерела збурення порушує існуючу рівновагу. Стан накопичення:

$$S_2 = (L, +).$$

Концентрація ще знаходиться в межах норми, але фіксується стійкий висхідний тренд. Система накопичує поллютанти, вичерпуючи свій компенсаторний резерв. Це критичний етап для активації систем раннього попередження.

3. Етап «Пік». Асиміляційна здатність середовища вичерпана, показники перевищують гранично допустимі концентрації (ГДК) і переходять у високий рівень  $H$ . Етап розділяється на дві фази станів:

– екстремальне погіршення:

$$S_3 = (H, +).$$

Рівень забруднення перевищив межу норми і продовжує стрімко зростати;

– хронічний пік:

$$S_4 = (H, 0).$$

Спостерігається зупинка зростання концентрації на максимумі, система стабільно перебуває в критичному стані (наприклад, утворення стабільного затору на дорозі за умов погодного штилю).

4. Етап «Регенерація». Інтенсивність джерела викидів зменшується або активізуються процеси атмосферного чи ґрунтового очищення. Стан активне розсіювання:

$$S_5 = (H, -).$$

Рівень забруднення залишається небезпечно високим, однак тренд динаміки змінюється на від'ємний. Система починає активно звільнятися від накопиченого забруднення.

5. Пост-критичне відновлення. Концентрація падає нижче ГДК, система повертається у нормативний діапазон, завершуючи очищення. Стан відновлювального фону:

$$S_6 = (L, -),$$

при якому рівень забруднення низький і за інерцією продовжує знижуватися до мінімумів.

Після повної стабілізації показників відбувається перехід  $S_6 \rightarrow S_1$ , що означає завершення екологічного циклу та повернення системи до вихідного стану. Марківський ланцюг переходів для такого циклу може набувати чіткого і послідовного вигляду:

$$S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_4 \rightarrow S_5 \rightarrow S_6 \rightarrow S_1. \quad (10)$$

Правила ідентифікації станів запишемо таким чином:

$$S_t = \begin{cases} S_1, E < E_{ГДК}, |\theta(t)| \leq \varepsilon; \\ S_2, E(t) \leq E_{ГДК}, \theta(t) > 0; \\ S_3, E(t) > E_{ГДК}, \theta(t) \geq 0; \\ S_4, E(t) > E_{ГДК}, |\theta(t)| \leq \varepsilon; \\ S_5, E(t) > E_{ГДК}, \theta(t) < -\varepsilon; \\ S_6, E(t) \leq E_{ГДК}, \theta(t) < -\varepsilon. \end{cases} \quad (11)$$

## ОПТИЧНІ ТА ОПТИКО-ЕЛЕКТРОННІ СЕНСОРИ І ПЕРЕТВОРЮВАЧІ В СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ ТА ЕКОЛОГІЧНОГО МОНІТОРИНГУ

Для опису динаміки екологічної системи у випадковий момент часу  $t \geq 0$  позначимо вектор-функцію ймовірностей станів:

$$p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t), p_5(t), p_6(t)), \quad (12)$$

де  $p_i(t)$ ,  $i = \overline{1,6}$  визначає ймовірність того, що в заданий момент часу  $t$  система перебуватиме у стані  $S_i$ ,  $i = \overline{1,6}$ . Оскільки множина визначених станів утворює повну групу несумісних подій, для будь-якого моменту часу  $t$  обов'язково виконується умова нормування:

$$\sum_{i=1}^6 p_i(t) = 1. \quad (13)$$

Динаміка розподілу ймовірностей у неперервному часі повністю визначається початковим станом системи  $p(0)$  та матрицею інтенсивностей переходів  $Q$  між екологічними станами (генератором Маркова розмірністю  $6 \times 6$ ):

$$Q = \begin{pmatrix} -q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & q_{15} & q_{16} \\ q_{21} & -q_{22} & q_{23} & q_{24} & q_{25} & q_{26} \\ q_{31} & q_{32} & -q_{33} & q_{34} & q_{35} & q_{36} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & -q_{44} & q_{45} & q_{46} \\ q_{51} & q_{52} & q_{53} & q_{54} & -q_{55} & q_{56} \\ q_{61} & q_{62} & q_{63} & q_{64} & q_{65} & -q_{66} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Динаміка зміни ймовірностей у неперервному часі описується прямою системою диференціальних рівнянь Колмогорова. У матричній формі її записують у такому вигляді:

$$\frac{dp(t)}{dt} = p(t) \cdot Q, \quad (15)$$

де  $p(t) = (p_1(t), \dots, p_6(t))$  – шуканий вектор ймовірностей перебування системи у відповідних станах в довільний момент часу  $t$ .

У розгорнутому вигляді для системи з 6 станів вона матиме вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dp_1(t)}{dt} = -q_{11}p_1(t) + q_{21}p_2(t) + q_{31}p_3(t) + q_{41}p_4(t) + q_{51}p_5(t) + q_{61}p_6(t); \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = q_{12}p_1(t) - q_{22}p_2(t) + q_{32}p_3(t) + q_{42}p_4(t) + q_{52}p_5(t) + q_{62}p_6(t); \\ \frac{dp_3(t)}{dt} = q_{13}p_1(t) + q_{23}p_2(t) - q_{33}p_3(t) + q_{43}p_4(t) + q_{53}p_5(t) + q_{63}p_6(t); \\ \frac{dp_4(t)}{dt} = q_{14}p_1(t) + q_{24}p_2(t) + q_{34}p_3(t) - q_{44}p_4(t) + q_{54}p_5(t) + q_{64}p_6(t); \\ \frac{dp_5(t)}{dt} = q_{15}p_1(t) + q_{25}p_2(t) + q_{35}p_3(t) + q_{45}p_4(t) - q_{55}p_5(t) + q_{65}p_6(t); \\ \frac{dp_6(t)}{dt} = q_{16}p_1(t) + q_{26}p_2(t) + q_{36}p_3(t) + q_{46}p_4(t) + q_{56}p_5(t) - q_{66}p_6(t). \end{cases} \quad (16)$$

Система диференціальних рівнянь розв'язують аналітично або чисельними методами (наприклад, методом Рунге-Кутти). За заданих початкових умов (наприклад,  $p(0) = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ , якщо моніторинг розпочинається зі стабільного фонового стану), аналітичний розв'язок даної системи диференціальних рівнянь знаходять через матричну експоненту:

$$p(t) = p(0)e^{Qt}. \quad (17)$$

За допомогою функцій  $p_i(t)$ ,  $i = \overline{1,6}$ , які дозволяють побудувати графіки ймовірностей, можна визначити, наприклад, ймовірність критичного стану,  $S_4$ , через деякий час після початку моделювання.

Враховуючи ергодичні властивості замкненого екологічного циклу, зі збільшенням часу ( $t \rightarrow \infty$ ) вплив початкового стану нівелюється, і система переходить до стаціонарного розподілу ймовірностей. Позначимо вектор стаціонарних ймовірностей як:

$$\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6), \quad (18)$$

$$\text{де } \pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t).$$

## ОПТИЧНІ ТА ОПТИКО-ЕЛЕКТРОННІ СЕНСОРИ І ПЕРЕТВОРЮВАЧІ В СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ ТА ЕКОЛОГІЧНОГО МОНІТОРИНГУ

Вектор  $\pi$  знаходять шляхом розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (оскільки у стаціонарному режимі похідні ймовірностей дорівнюють нулю):

$$\begin{cases} \vec{\pi} Q = 0; \\ \sum_{i=1}^6 \pi_i = 1. \end{cases} \quad (19)$$

Оскільки, за відсутності деякого стану у вибірці в системі рівнянь (20) з'являються рядки з нульових значень для її розв'язку доцільно використовувати метод найменших квадратів або псевдообернення Мура-Пенроуза. Цей метод опрацьовує нульові рядки, коректно присвоюючи відсутнім станам 0% ймовірності у стаціонарному розподілі. Знаходження компонентів вектора  $\vec{\pi}$  має практичне значення, оскільки величина  $\pi_i$  чисельно дорівнює частці загального часу, яку досліджувана територія або акваторія буде перебувати під критичним впливом джерела емісії.

Отже, вибір на користь марківських процесів із неперервним часом для математичного моделювання екологічних систем ґрунтується на низці переваг, які дозволяють вирішити недоліки існуючих статистичних та детермінованих методів. Завдяки властивостям марківських процесів, модель надає інструментарій для розрахунку не лише поточних станів, але й стаціонарного (граничного) розподілу. Це дає змогу оцінити ризик – яку частку часу екосистема об'єктивно перебуватиме у зоні небезпеки за існуючого балансу між інтенсивністю джерел впливу та асиміляційним потенціалом самого середовища.

### РЕЗУЛЬТАТИ ТА ОБГОВОРЕННЯ

Для верифікації розробленої неперервно-часової марківської моделі ідентифікації екологічних станів було проведено серію чисельних експериментів на основі натурних вимірювань концентрації діоксиду азоту ( $NO_2$ ) у мікрорайонах з різним антропогенним та інфраструктурним навантаженням.

Збір експериментальних даних здійснювався на двох транспортних вузлах м. Тернополя зі суттєво відмінними аеродинамічними та мікрокліматичними характеристиками:

Локація 1 (перехрестя вул. Руська–Замкова–Шашкевича). Даний вузол характеризується відкритістю та високим рівнем природної провітрюваності, що зумовлено просторовою орієнтацією вулиць. Це створює сприятливі умови для горизонтального розсіювання автомобільних викидів (рис. 1);

Локація 2 (перехрестя вул. Чехова–За Рудкою). Ця ділянка відзначається складною топологією через щільну міську забудову (ефект «вуличного каньйону»), що суттєво знижує провітрюваність. Крім того, специфікою локації є наближеність проїжджої частини до фасадів будівель (рис. 2).



Рисунок 1 – Результати вимірювань в локації 1

Крок дискретизації вимірювань становив  $dt = 20$  хв. Нормативний критерій екологічної безпеки (ГДК) для  $NO_2$  було зафіксовано на рівні  $E_{ГДК} = 0,085$  мг/м<sup>3</sup>. Відносна похибка вимірювальної системи становила 3%. Цей показник було інтегровано в алгоритм як динамічний поріг чутливості  $\epsilon_t$ , що

## ОПТИЧНІ ТА ОПТИКО-ЕЛЕКТРОННІ СЕНСОРИ І ПЕРЕТВОРЮВАЧІ В СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ ТА ЕКОЛОГІЧНОГО МОНІТОРИНГУ

дозволило системі безпомилково відрізнити реальні кінетичні переходи екосистеми від інструментального шуму.



Рисунок 2 – Результати вимірювань в локації 2

За допомогою розробленої програмної системи, яку було реалізовано засобами Python, здійснили обробку даних за таким сценарієм:

- для трансформації ряду вимірювань у марківський процес із дискретними станами було застосовано правила ідентифікації станів (11). Кожному вимірюванню на основі співвідношення поточного рівня до ГДК та динаміки тренду, присвоювався вектор стану (від стабільного фону до відновлювального фону);

- для кожної локації розраховували матриці  $Q$ . Це ключовий етап експерименту, оскільки саме елементи матриці  $q_{ij}$  фіксують фізичну різницю між локаціями: наприклад, здатність вузла «Руська – Замкова» до швидкого розсіювання відображається у високих значеннях інтенсивності виходу з критичних станів. Графи переходів на основі матриць інтенсивностей для відповідних точок замірів наведено на рис. 3.

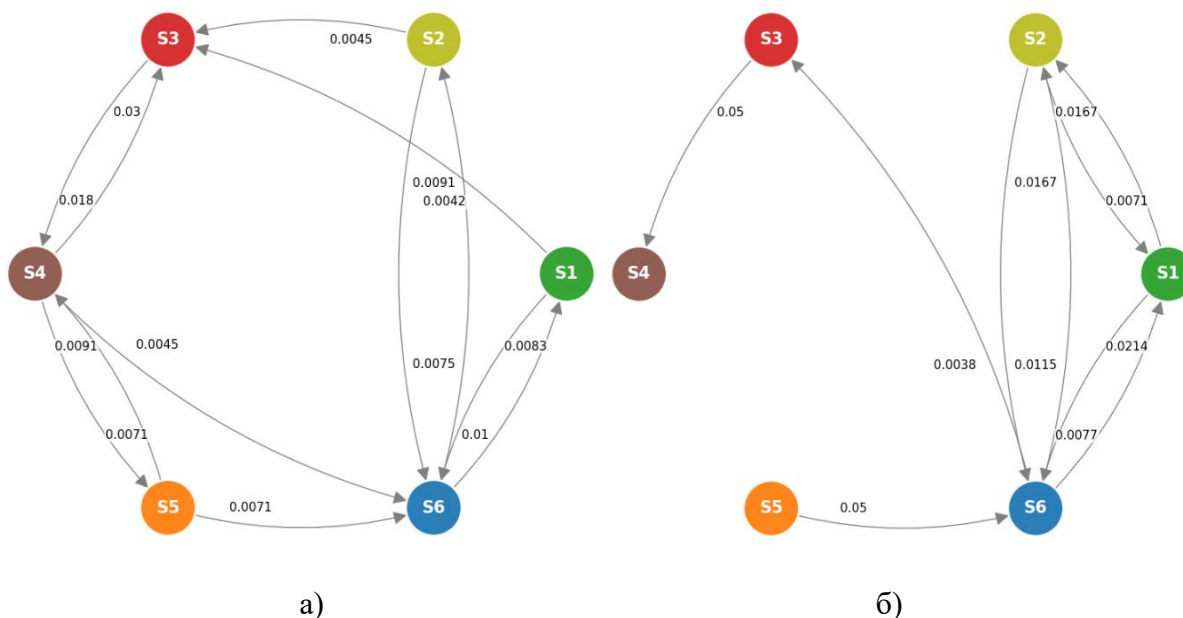


Рисунок 3 – Графи переходів для екологічних станів: а) – локація 1, б) – локація 2

- шляхом розв'язання прямої системи диференціальних рівнянь Колмогорова (16) було обчислено динаміку розподілу ймовірностей станів у неперервному часі для обох вузлів. Нижче наведено систему рівнянь на основі матриці інтенсивності для першої локації:

## ОПТИЧНІ ТА ОПТИКО-ЕЛЕКТРОННІ СЕНСОРИ І ПЕРЕТВОРЮВАЧІ В СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ ТА ЕКОЛОГІЧНОГО МОНІТОРИНГУ

$$\begin{cases} \frac{dp_1(t)}{dt} = -0.0125p_1(t) + 0.0042p_3(t) + 0.0083p_6(t); \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = -0.0136p_2(t) + 0.0045p_3(t) + 0.0091p_6(t); \\ \frac{dp_3(t)}{dt} = -0.03p_3(t) + 0.03p_4(t); \\ \frac{dp_4(t)}{dt} = 0.018p_3(t) - 0.0318p_4(t) + 0.0091p_5(t) + 0.0045p_6(t); \\ \frac{dp_5(t)}{dt} = 0.0071p_4(t) - 0.0318p_5(t) + 0.0071p_6(t); \\ \frac{dp_6(t)}{dt} = 0.01p_1(t) + 0.0075p_2(t) - 0.0175p_6(t). \end{cases} \quad (20)$$

Графіки динаміки ймовірностей екологічних станів для досліджуваних локації наведено на рис. 4, 5.

На основі знаходження стаціонарного розподілу обчислювався відсоток часу, який кожна локація проводить у небезпечних зонах ( $H$ -рівень). Для забезпечення математичної стійкості алгоритму (уникнення помилки вироджених матриць при відсутності певних станів у вибірці) застосовувався метод динамічного усічення матриць з використанням розв'язку найменших квадратів.

Стаціонарний розподіл ймовірностей екологічних станів для першої локації:

$$\pi_{L1} = (0.2008, 0.1381, 0.1464, 0.1611, 0.1025, 0.251).$$

Стаціонарний розподіл ймовірностей екологічних станів для другої локації:

$$\pi_{L2} = (0.25, 0.2143, 0.0357, 0, 0.0357, 0.4643).$$

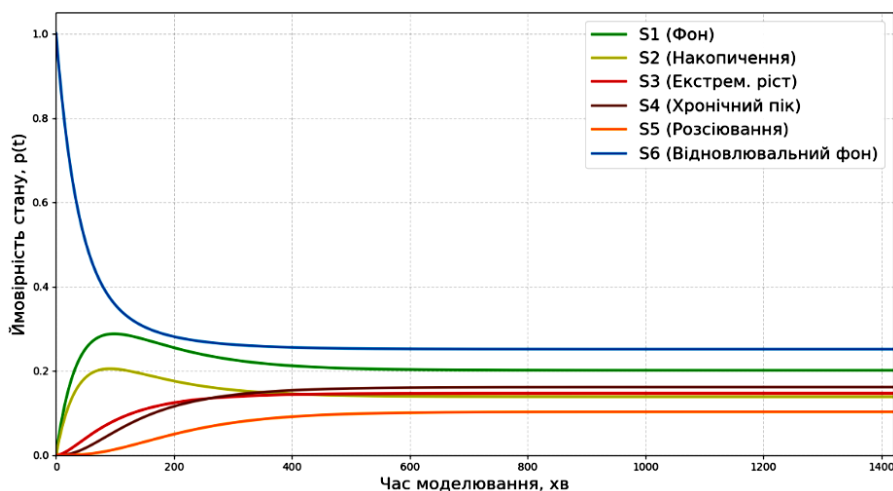


Рисунок 4 – Динаміка ймовірностей перебування екологічної системи у визначених станах для локації 1

Застосування марківської моделі дозволило виявити нетривіальні закономірності аерокінематики міського середовища. Експериментальні дані та розраховані матриці інтенсивностей продемонстрували, що відкритість перехрестя (Локація 1) не є гарантією екологічної безпеки у випадку домінування високого емісійного навантаження від інтенсивного трафіку, що математично підтверджується досить високою ймовірністю стану «Хронічний пік»,  $S_4$ , (рис. 6 а).

## ОПТИЧНІ ТА ОПТИКО-ЕЛЕКТРОННІ СЕНСОРИ І ПЕРЕТВОРЮВАЧІ В СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ ТА ЕКОЛОГІЧНОГО МОНІТОРИНГУ

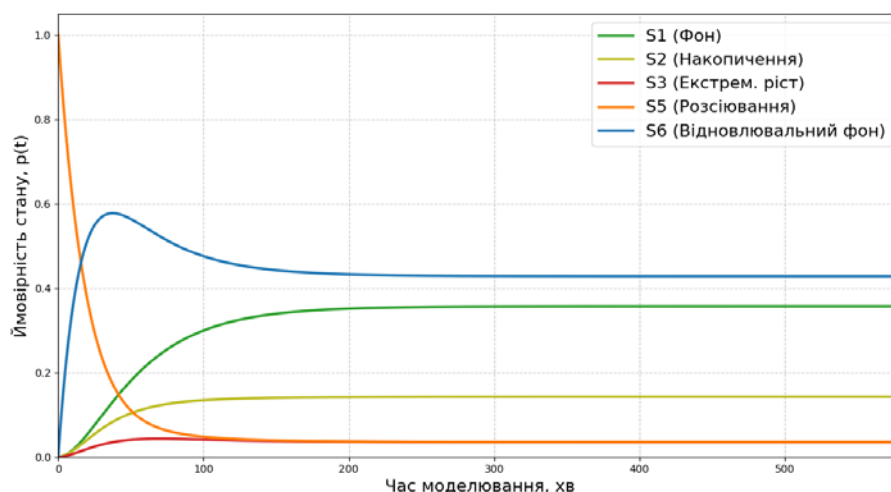


Рисунок 5 – Динаміка ймовірностей перебування екологічної системи у визначених станах для локації 1

Водночас, результати для Локації 2 (вул. Чехова – За Рудкою) доводять компенсаторну роль мікрокліматичних факторів. Незважаючи на гіршу горизонтальну провітрюваність через щільну забудову, загальний рівень забруднення виявився нижчим. Розроблена модель ідентифікувала для цієї локації домінування стану «Відновлювальний фон»,  $S_6$ , та відсутність критичних піків забруднення (рис. 6.б). Фізично це пояснюється наявністю інтенсивних вертикальних теплових потоків, які спричинені наближеністю дороги до будівель, що створюють ефект конвективного витягування  $NO_2$ , виступаючи потужним чинником самоочищення екосистеми навіть у моменти пікових транспортних навантажень.

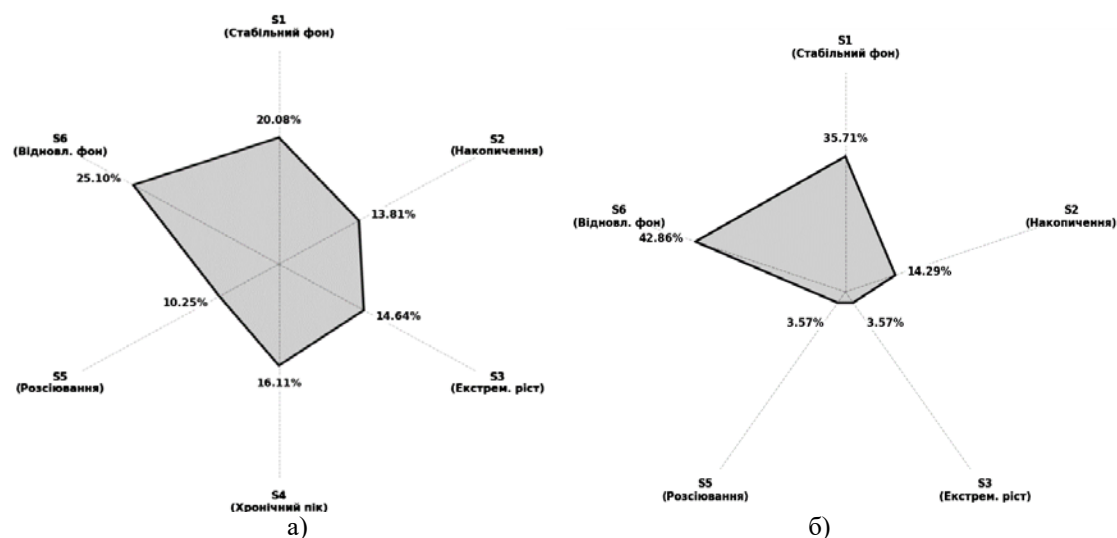


Рисунок 6 – Стаціонарний розподіл ймовірностей перебування системи у станах: а) локація 1, б) локація 2

### ВИСНОВКИ

У результаті проведеного дослідження вирішено актуальну науково-прикладну задачу математичного моделювання та прогнозування динаміки екологічних станів урбанізованих систем. Розроблено та формалізовано неперервно-часову марківську модель екологічних станів. Доведено, що для подолання інерційності екологічної системи та забезпечення строгої марківської властивості, фазовий простір системи необхідно розширити шляхом введення динамічної трендової компоненти. Використання множин рівнів концентрації та фаз тренду дозволило сформулювати 6 взаємовиключних

## ОПТИЧНІ ТА ОПТИКО-ЕЛЕКТРОННІ СЕНСОРИ І ПЕРЕТВОРЮВАЧІ В СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ ТА ЕКОЛОГІЧНОГО МОНІТОРИНГУ

станів, які адекватно описують повний життєвий цикл екологічного збурення: від стабільного фону до відновлювального фону. Використання порогу чутливості, що базується на відносній похибці вимірювальних систем, дозволило надійно ідентифікувати переходи екосистеми та відфільтрувати шум.

Розрахунок стаціонарного (граничного) розподілу ймовірностей за допомогою рівнянь Колмогорова виступає ефективним інструментом для кількісної оцінки екологічного ризику – визначення частки часу, яку екосистема об'єктивно перебуває під критичним впливом емісії. Запропонований підхід долає обмеження традиційних методів, які базуються виключно на фіксації поточного перевищення нормативів. Розроблена марківська модель формує аналітичне ядро для сучасних інформаційно-керуючих систем, дозволяючи прогнозувати ймовірність переходу до критичних станів і надаючи об'єктивні дані для оптимізації транспортних потоків та міського планування.

### ПОДЯКА

Статтю підготовлено в рамках науково-дослідного проекту 2025.07/0207 «Концепція знання-орієнтованої технології для моделювання та прогнозування стану навколишнього природного середовища на основі неточних даних» який реалізується завдяки грантовій підтримці Національного фонду досліджень України.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Наказ МОЗ України № 52 від 14.01.2020. «Про затвердження гігієнічних регламентів допустимого вмісту хімічних і біологічних речовин у атмосферному повітрі населених місць». Міністерство охорони здоров'я України. Київ, 2020.
2. Директива 2008/50/ЄС Європейського Парламенту та Ради від 21 травня 2008 року про якість атмосферного повітря та чистіше повітря для Європи. [https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/994\\_950#Text](https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/994_950#Text).
3. Wu, F.; Rüdiger, C.; Redouté, J.; Yuce, M.R. Live Demonstration: An IoT Platform for Environmental Monitoring Using Self-Powered Sensors. In Proceedings of the IEEE Sensors, New Delhi, India, 28–31 October 2018.
4. Ferro, M.; Paciello, V.; Pietrosanto, A.; Sommella, P. A distributed measurement system for the estimation of air quality. *IEEE Instrum. Meas. Mag.* 2020, 23, 51–56.
5. Wu, F.; Rudiger, C.; Yuce, M.R. Design and field test of an autonomous iot wsn platform for environmental monitoring. In Proceedings of the 27th International Telecommunication Networks and Applications Conference (ITNAC), Melbourne, VIC, Australia, 22–24 November 2017; pp. 1–6.
6. Moroni, A., et al. (2024). Continuous Markov Models for Analyzing the Effect of Environmental Personal Exposure on Multiple Sclerosis Progression. *Studies in Health Technology and Informatics*, 314, 401-405. <https://doi.org/10.3233/SHTI240069>
7. Jahin, N. A. M., et al. (2019). Markov Chain Model Development for Forecasting Air Pollution Index. *Sustainability*, 11(19), 5190. <https://doi.org/10.3390/su11195190>
8. Owayid, A. M., et al. (2024). Air Quality Index Prediction Using DNN-Markov Modeling. *Applied Artificial Intelligence*, 38(1). <https://doi.org/10.1080/08839514.2024.2371540>
9. Hood, C., et al. (2020). Comprehensive evaluation of an advanced street canyon air pollution model. *Journal of the Air & Waste Management Association*, 70(11), 1146-1160. <https://doi.org/10.1080/10962247.2020.1803158>
10. Wang, Y., et al. (2024). Effects of street plants on atmospheric particulate dispersion in urban streets: A review. *Environmental Reviews*. <https://doi.org/10.1139/er-2023-0103>
11. Dyvak M., Spivak I., Melnyk A., Manzhula V., Dyvak T., Rot, A., Hernes, M. Modeling Based on the Analysis of Interval Data of Atmospheric Air Pollution Processes with Nitrogen Dioxide due to the Spread of Vehicle Exhaust Gases. *Sustainability (Switzerland)*. 2023. 15 (3). P. 2163. <https://doi.org/10.3390/su15032163>.

### REFERENCES

1. Order of the Ministry of Health of Ukraine No. 52 dated 14.01.2020. “On approval of hygienic regulations for the permissible content of chemical and biological substances in the ambient air of populated areas”. Ministry of Health of Ukraine. Kyiv, 2020.
2. Directive 2008/50/EC of the European Parliament and of the Council of 21 May 2008 on ambient air quality and cleaner air for Europe. [https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/994\\_950#Text](https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/994_950#Text)

---

---

## ОПТИЧНІ ТА ОПТИКО-ЕЛЕКТРОННІ СЕНСОРИ І ПЕРЕТВОРЮВАЧІ В СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ ТА ЕКОЛОГІЧНОГО МОНІТОРИНГУ

---

---

3. Wu, F.; Rüdiger, C.; Redouté, J.; Yuce, M.R. Live Demonstration: An IoT Platform for Environmental Monitoring Using Self-Powered Sensors. In Proceedings of the IEEE Sensors, New Delhi, India, 28–31 October 2018.
4. Ferro, M.; Paciello, V.; Pietrosanto, A.; Sommella, P. A distributed measurement system for the estimation of air quality. *IEEE Instrum. Meas. Mag.* 2020, 23, 51–56.
5. Wu, F.; Rudiger, C.; Yuce, M.R. Design and field test of an autonomous iot wsn platform for environmental monitoring. In Proceedings of the 27th International Telecommunication Networks and Applications Conference (ITNAC), Melbourne, VIC, Australia, 22–24 November 2017; pp. 1–6.
6. Moroni, A., et al. (2024). Continuous Markov Models for Analyzing the Effect of Environmental Personal Exposure on Multiple Sclerosis Progression. *Studies in Health Technology and Informatics*, 314, 401-405. <https://doi.org/10.3233/SHTI240069>
7. Jahin, N. A. M., et al. (2019). Markov Chain Model Development for Forecasting Air Pollution Index. *Sustainability*, 11(19), 5190. <https://doi.org/10.3390/su11195190>
8. Owayid, A. M., et al. (2024). Air Quality Index Prediction Using DNN-Markov Modeling. *Applied Artificial Intelligence*, 38(1). <https://doi.org/10.1080/08839514.2024.2371540>
9. Hood, C., et al. (2020). Comprehensive evaluation of an advanced street canyon air pollution model. *Journal of the Air & Waste Management Association*, 70(11), 1146-1160. <https://doi.org/10.1080/10962247.2020.1803158>
10. Wang, Y., et al. (2024). Effects of street plants on atmospheric particulate dispersion in urban streets: A review. *Environmental Reviews*. <https://doi.org/10.1139/er-2023-0103>
11. Dyvak M., Spivak I., Melnyk A., Manzhula V., Dyvak T., Rot, A., Hernes, M. Modeling Based on the Analysis of Interval Data of Atmospheric Air Pollution Processes with Nitrogen Dioxide due to the Spread of Vehicle Exhaust Gases. *Sustainability (Switzerland)*. 2023. 15 (3). P. 2163. <https://doi.org/10.3390/su15032163>.

*Дата надходження: 12.03.2026*

*Дата прийняття до друку після рецензування: 27.04.2026*

*Дата публікації: 18.06.2026*

*Ця робота ліцензується відповідно до*

*[Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)*

**ДИВАК МИКОЛА ПЕТРОВИЧ** – д.т.н., професор, Західноукраїнський національний університет, Україна, *e-mail: [mdy@wunu.edu.ua](mailto:mdy@wunu.edu.ua)*, <https://orcid.org/0000-0002-9049-4993>

**МАНЖУЛА ВОЛОДИМИР ІВАНОВИЧ** – д.т.н., професор, Західноукраїнський національний університет, Україна, *e-mail: [v.manzhula@wunu.edu.ua](mailto:v.manzhula@wunu.edu.ua)*, <https://orcid.org/0000-0001-5222-8443>

**Mykola DYVAK, Volodymyr MANZHULA**

**DISCRETE-CONTINUOUS STOCHASTIC MODEL OF IDENTIFICATION OF ENVIRONMENTAL ECOLOGICAL STATES**

West Ukrainian National University, Ukraine